

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

Διπλωματική εργασία

**Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Αεροελαστικότητας**

Καρκαλέτσης Άγγελος



Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής Δ. Βαλουγεώργης

Βόλος, Σεπτέμβριος 2000

αρ. ελ.α. 217-2000 / 7Α



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000062121

Ευχαριστώ του καθηγητές κ. Δ. Βαλουγεώργη, Ν. Βλάχο και Σ. Καραμάνο. Επίσης ευχαριστώ τους καθηγητές του τμήματος και ιδιαίτερα τους κ. Γ. Λεκάκη , Β. Μποντόζογλου και Μ. Σκαρπέτη για τις γνώσεις που μου έδωσαν και την υπομονή τους.

Ευχαριστώ και όλους τους συνεργάτες του εργαστηρίου τον κ. Θ. Γκίκα Διπλ. Μηχανολόγο Μηχανικό και τους συναδέλφους μου Κ. Αχλαδιανάκη, Ζ. Πουλάκη, Κ. Ζαραγουλίδη και Σ. Μαραγκουδάκη.

Ευχαριστώ τους γονείς μου για την απεριόριστη και συνεχή συμπαράσταση και στήριξη, ηθική και υλική, την Διπλ. Πολιτικό Μηχανικό Α. Γεωργηλά και την Β. Λαμπροπούλου.

## Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
2. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ.....	7
3. ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ	
3.1 Εισαγωγή.....	9
3.2 Διατύπωση εξισώσεων Euler.....	9
3.3 Διατύπωση ακουστικών εξισώσεων.....	11
3.4 Διατύπωση μη γραμμικών εξισώσεων διαταραχών πεπερασμένου πλάτους.....	15
4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ	
4.1 Εισαγωγή.....	18
4.2 Γραμμική εξίσωση κύματος.....	20
4.3 Μη γραμμική εξίσωση Burger.....	33
4.4 Συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού.....	35
4.5 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	37
5. ΑΛΛΗΛΟΕΠΙΔΡΑΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	
5.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	39
5.2 Αναλυτική λύση.....	40
6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ ΠΕΔΙΩΝ ΛΥΣΗΣ ΡΕΥΣΤΟΥ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	
6.1 Αριθμητική μέθοδος επίλυσης ταλαντωτή.....	49
6.2 Αριθμητική μέθοδος επίλυσης πεδίου ροής.....	51
6.3 Σύζευξη λύσεων μέσω οριακών συνθηκών.....	53
6.3.1 Σύζευξη με διαφορά φάσης.....	54
6.3.2 Πλήρως πεπλεγμένη λύση.....	55

6.4	Αποτελέσματα.....	57
6.5	Ευστάθεια.....	69
7.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	76
	ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	77
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.....	78
	ΠΑΡΑΣΤΗΜΑ Β ΠΗΓΑΙΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ.....	82

## Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι τελευταίες πρόοδοι που σημειώθηκαν στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των αριθμητικών μεθόδων επέτρεψαν στην επιστήμη της μηχανικής να ασχοληθεί με προβλήματα που μέχρι πριν λίγα χρόνια την απασχολούσαν μόνο θεωρητικά. Οι νέες δυνατότητες ώθησαν σε επανεξέταση τις ήδη υπάρχουσες τεχνικές και την φιλοσοφία προσέγγισης σε αυτά τα προβλήματα. Το εικονικό πείραμα και η εικονική μηχανική χρησιμοποιούνται από τους περισσότερους μηχανικούς που απασχολούνται στην μελέτη και σχεδίαση. Είναι εύκολο να μετακινηθούν δεδομένα από σχεδιαστικά προγράμματα C.A.D. σε αντίστοιχα ανάλυσης τάσεων, ενώ είναι λιγότερο εύκολο αλλά εφικτό να μετακινηθούν τα ίδια δεδομένα σε πρόγραμμα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Πλέον, είναι δυνατή η προσομοίωση των περισσότερων προβλημάτων σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές και η ανάλυσή γίνεται με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το εικονικό μοντέλο.

Ένας τέτοιος τομέας της μηχανικής είναι και η αεροελαστικότητα, η οποία μελετά σύνθετα προβλήματα που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση ρευστών και κατασκευών όταν συζευγνύονται τα πεδία λύσης τους. Στις περιπτώσεις αυτές, τα δύο σώματα, ρευστό και στερεό, λύνονται κάθε χρονική στιγμή, είτε από χωριστούς αλγορίθμους, είτε από κοινό, και ανταλλάζουν πληροφορίες στο σύνορό τους. Αυτές είναι συνήθως η ταχύτητα και η πίεση του ρευστού και η μετατόπιση και η ταχύτητα της κατασκευής, που εκφράζουν την μεταφορά ορμής και ενέργειας μεταξύ των δύο συστημάτων μέσω συζευγμένων οριακών συνθηκών. Η σύζευξη αυτή φαίνεται να απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή.

Οι δυσκολίες στην διατύπωση αποδοτικών υπολογιστικών αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων αλληλοεπίδρασης ρευστού-κατασκευής προκύπτουν από τις δυσκολίες που δημιουργούνται στην προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν σε ένα νέο τομέα τα είδη υπάρχοντα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται στην μηχανική των ρευστών και στην δυναμική των κατασκευών. Στην μηχανική των ρευστών περιγραφές τύπου Euler χρησιμοποιούνται ευρέως ενώ η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων δεν φαίνεται να εκτοπίζει τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων όγκων. Στην δυναμική των κατασκευών περιγραφές τύπου Lagrange βρίσκονται σε υψηλό επιστημονικό επίπεδο, ενώ οι τεχνικές των πεπερασμένων διαφορών δεν εφαρμόζονται. Όταν, λοιπόν, ασχολείται κανείς με προβλήματα συζευγμένων συστημάτων ρευστού-κατασκευής αντιμετωπίζει ασύμβατα επικοινωνιακά μεταξύ τους αριθμητικά σχήματα.

Για την επίλυση προβλημάτων αεροελαστικότητας που συζευγνύουν ροές με κατασκευές είναι απαραίτητη η επίλυση μεγάλων τρισδιάστατων αριθμητικών

μοντέλων. Με δεδομένες αυτές τις δυσκολίες υπάρχουν τεχνικές που ακολουθούν την «κλασσική προσέγγιση», όπου το ρευστό και η κατασκευή επιλύονται χωριστά σε κάθε χρονικό βήμα και στην συνέχεια συζευγνύονται με τη βοήθεια των κινηματικών οριακών συνθηκών. Οι εναλλακτικές τεχνικές προσεγγίζουν την κατασκευή και το ρευστό με τις ίδιες εξισώσεις που όμως εμπλέκονται μεταξύ τους σχηματίζοντας ένα πρόβλημα συνεχούς δυναμικής.

Όλες οι εφαρμογές βασίζονται στην εφαρμογή πλεγμάτων. Αυτά είναι κινούμενα στην περίπτωση που επιλύονται μη γραμμικές εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις Euler που περιγράφουν το ρευστό. Τα κινούμενα ή προσαρμοζόμενα πλέγματα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος, τόσο στην ακρίβεια της λύσης, όσο και στον χρόνο σύγκλισης των αριθμητικών μεθόδων. Ακόμη επιτρέπουν την απλούστευση της επίλυσης στους οριακούς κόμβους όπου συμβαίνει εναλλαγή ενέργειας και καθιστούν δυνατό τον επαναπροσδιορισμό των κόμβων του ρευστού στις περιοχές όπου σημειώνονται μεγάλα βαθμωτά μεγέθη στην λύση. Τα Λαγκρανζιανά πλέγματα είναι γενικά ακατάλληλα για την περιοχή του ρευστού, διότι παρατηρείται υψηλή περίπλεξη και υπερβολική παραμόρφωση εάν η κίνηση του είναι μεγάλη.

Τεχνικές όπως οι παραπάνω έχουν εφαρμογή σε υπολογισμούς αεροναυπηγικής, όπου το ελάχιστο βάρος των μελών των κατασκευών είναι επιθυμητό. Στην υπολογιστική αεροδυναμική, κινούμενα πλέγματα και φαινόμενα σύζευξης έχουν χρησιμοποιηθεί και επιλυθεί στον υπολογισμό ροών γύρω από πτέρυγες και σώματα. Συνέπεια της οικονομίας σε υλικό που απαιτούν οι αεροπορικές κατασκευές να είναι επιρρεπείς σε φαινόμενα αεροελαστικότητας και για τον λόγο αυτό είναι αναγκαία η μελέτη τους.

Στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη προβλημάτων αλληλοεπίδρασης ανάμεσα στα πεδία λύσης του ρευστού και της κατασκευής. Έμφαση δίδεται στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου σύζευξης των δύο προβλημάτων με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση στην σχετική βιβλιογραφία. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η συμπίεστή ροή μη συνεκτικού ρευστού. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κύματος, Berger και ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Στο πέμπτο κεφάλαιο επιλύεται αναλυτικά το πρότυπο πρόβλημα αλληλοεπίδρασης ρευστού-κατασκευής. τέλος στο έκτο κεφάλαιο μελετούνται αλγόριθμοι για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος του εμβόλου.

Στην συνέχεια, πεπλεγμένες και πλήρως συζευγμένες (Monolithic Algorithms) μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν, οι οποίες επιτρέπουν μεγάλα βήματα στον χρόνο με αποτέλεσμα να μειώνεται ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Τα πλεονεκτήματα αυτών των μεθόδων οφείλονται στην επίλυση του ρευστού και της κατασκευής από ένα κοινό αλγόριθμο επίλυσης για κάθε βήμα στον χρόνο. Τα αποτελέσματα

χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των μεθόδων. Χαρακτηριστικό πρόβλημα αλληλεπίδρασης ρευστού κατασκευής είναι αυτό του εμβόλου. Όπως περιγράφεται παρακάτω, το πρόβλημα ενώ είναι μονοδιάστατο περιγράφει τις πρωτεύουσες ιδιοτιμές και έχει ενδιαφέρον διότι παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά με το τρισδιάστατο μοντέλο σε ότι αφορά στην ευστάθεια και ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε συνάρτηση με την μέθοδο επίλυσης του προβλήματος. Η ανάλυση αποκαλύπτει πως δεν υπάρχει λανθάνουσα αριθμητική αστάθεια, αλλά υφίσταται πρόβλημα ακρίβειας της αριθμητικής λύσης.

Η ανάλυση του προβλήματος γίνεται θεωρώντας την ροή μη μόνιμη και συμπιεστή. Μη μόνιμη είναι διότι το πρόβλημα είναι δυναμικό. Η κατασκευή αλλάζει θέση συνεχώς με αποτέλεσμα την αλλαγή της συνοριακής συνθήκης του ρευστού. Συμπιεστή είναι διότι η παραμόρφωση του στερεού απαιτεί συμπιεστότητα του ρευστού στο σύνορο και σε όλη του την μάζα.



## Κεφάλαιο 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Ιστορικά, οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με την υπολογιστική αεροελαστικότητα, ανέπτυξαν πεπλεγμένους αλγορίθμους βασισμένους στις εξισώσεις Navier-Stokes που επέλυναν σύνθετες τρισδιάστατες ροές και στην συνέχεια τους επέκτειναν ώστε να περικλύσουν φαινόμενα αεροελαστικότητας. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποίησαν σε αυτή την επέκταση ήταν η μετατόπιση, χρονικά, της επίλυσης της κατασκευής. Αρχικά υπολογίζονταν οι αεροδυναμικές μεταβλητές με τους υπάρχοντες αλγορίθμους και στην συνέχεια ένας δεύτερος αλγόριθμος καλούνταν να επιλύσει την κατασκευή, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αεροδυναμικά φορτία. Το μειονέκτημα αυτής της τακτικής είναι ότι ανεξάρτητα από την ακρίβεια επίλυσης του ρευστού και της κατασκευής, η χρονική υστέρηση εισάγει σφάλμα της τάξης  $O(\Delta t)$  στην τελική λύση. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η δημιουργία πλήρως πεπλεγμένων αριθμητικών σχημάτων.

Την τελευταία δεκαετία όπου οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έγιναν προσιτοί και απέκτησαν σημαντική υπολογιστική ισχύ, έγιναν πολλές περισσότερες δημοσιεύσεις από τον χώρο της επιστημονικής κοινότητας καθώς και από τα τμήματα έρευνας και τεχνολογίας μεγάλων κατασκευαστών που δραστηριοποιούνται στον χώρο της αεροναυτιλοΐας. Το ενδιαφέρον έχει αυξηθεί σημαντικά, καθώς σημαντικά ερωτήματα παραμένουν χωρίς απάντηση.

Το 1977 εισάγεται η μετατοπισμένη ή εναλλάξ μέθοδος (staggered) από τους **Park et al** [1]. Η εναλλάξ επίλυση του ρευστού και της κατασκευής περιλαμβάνεται στον αλγόριθμο του **Piperno** [2]. Οι **Piperno** και **Farhat et al.** [3] ερεύνησαν διάφορες παράλληλες εκδόσεις μετατοπισμένων σχημάτων, ενώ οι **Prananta and Hounjet** [4] μελέτησαν και ανάλυσαν μεθόδους πρόβλεψης διόρθωσης τόσο για το ρευστό, όσο και για την κατασκευή. Ο **Giles** [5] μελέτησε μετατοπισμένα σχήματα και κατευθύνθηκε προς την έκφραση της αριθμητικής ευστάθειας και ακρίβειας πολλών μετατοπισμένων μεθόδων επίλυσης του ρευστού και της κατασκευής.

Ένας δεύτερος αλγόριθμος αλληλεπίδρασης προτάθηκε από τον **Bendiksen** [6] όπου το ρευστό και η κατασκευή ολοκληρώνονται στο πεδίο του χρόνου από ένα ρητό σχήμα Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Η αλληλεπίδραση μεταξύ ρευστού και κατασκευής υλοποιείται με την ενημέρωση σε κάθε ενδιάμεσο χρονικό βήμα της επίλυσης. Η ακρίβειά της είναι ανώτερη των άλλων σχημάτων διότι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί κατά την ανταλλαγή πληροφοριών είναι μικρότερο, αλλά η μέθοδος παραμένει μετατοπισμένη. Τον μετατοπισμένο στον χρόνο αλγόριθμο υιοθετούν και οι **Blom and Leyland** [7]. Με βάση την δημοσίευση των τελευταίων, στο πλαίσιο της παρακάτω εργασίας αναπτύχθηκε ένας κώδικας σε περιβάλλον **Mathematica** που θα εξελιχθεί στο μέλλον ώστε να επιλύει περισσότερο πολύπλοκα

προβλήματα. Στο παράρτημα Β παρουσιάζονται οι πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν.

Πρόσφατα οι πλήρως συζευγμένοι πεπλεγμένοι αλγόριθμοι έγιναν περισσότερο ενδιαφέροντες. Αυτό οφείλεται στην ανάγκη για μεγαλύτερα βήματα στον χρόνο ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος. Οι **Alonso and Jameson** [8] και οι **Melville et al** [9] χρησιμοποίησαν έναν πεπλεγμένο αλγόριθμο για να επιλύσουν το ρευστό και την κατασκευή σε κάθε βήμα στον χρόνο. Το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων λύνεται με την μέθοδο Newton. Για να επιτευχθεί πλήρης σύζευξη η αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων ενημερώνεται σε κάθε ενδιάμεση επανάληψη. Η επίδραση του αριθμού των ενδιάμεσων επαναλήψεων στην ακρίβεια του σχήματος μελετήθηκε από τους **Melville et al** [10]. Ο αλγόριθμος παραμένει μετατοπισμένος στην αρχή του και συγκλίνει σε πλήρως συζευγμένο σύστημα όταν ο αριθμός των βημάτων στο χρόνο αυξάνει.

Στην συνέχεια χρησιμοποιείται ένας πλήρως συζευγμένος αλγόριθμος που λύνει το ρευστό και την κατασκευή ταυτόχρονα σε κάθε επανάληψη και προτάθηκε από τους **Blom and Leyland**. Πλεονέκτημα της μεθόδου είναι πως αποφεύγει την χρονική διαφορά που παρατηρείται στους μετατοπισμένους αλγορίθμους. Ένας μοναδικός τελεστής ενεργεί στο ρευστό και την κατασκευή και επιλύει και τα συστήματα στον χρόνο. Ο τελεστής αυτός ολοκληρώνει το ρευστό, την κατασκευή και διεκπεραιώνει την αλληλεπίδραση. Ο αλγόριθμος εξετάζεται αναλυτικά και τα αποτελέσματά του συγκρίνονται με αυτά μετατοπισμένων σχημάτων. Το πρόβλημα που επιλύεται για την επίδειξη των μεθόδων είναι αυτό του πιστονιού, που είναι σχετικά απλό. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μπορούν να επεκταθούν και σε προβλήματα υψηλότερων διαστάσεων.

## Κεφάλαιο 3. ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

### 3.1 Εισαγωγή

Για να μελετηθούν τα παρακάτω φαινόμενα ευκολότερα, το ρευστό θα θεωρηθεί μη συνεκτικό, δεν θα παραλειφθούν όμως οι αδρανειακή όροι στις εξισώσεις που το περιγράφουν, καθώς σε αυτή του την ιδιότητα οφείλονται τα περισσότερα φαινόμενα συμπίεστότητας που παρουσιάζει. Οι όροι διάχυσης είναι μικρού μεγέθους συγκριτικά με τους αδρανειακούς και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι μη μόνιμες εξισώσεις Euler.

### 3.2 Διατύπωση εξισώσεων Euler

Θεωρούμε ένα σταθερό και πλήρως ορισμένο από σταθερό σύνορο όγκο ελέγχου. Το ρευστό που διέρχεται μέσα από αυτόν είναι συμπίεστο και μη συνεκτικό και περιγράφεται από τους νόμους συνέχειας της μάζας, της ορμής και της ενέργειας, οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις Euler,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 ,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p ,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) E = -\nabla p \cdot \mathbf{u} ,$$

όπου  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $E$  και  $p$  συμβολίζουν την πυκνότητα, το διάνυσμα της ταχύτητας, την συνολική ενέργεια και πίεση αντίστοιχα. Στην πρώτη εξίσωση ο πρώτος όρος δηλώνει τον ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας και ο δεύτερος την ροή μάζας που περνάει από την επιφάνεια ελέγχου. Στην δεύτερη εξίσωση, η οποία είναι ο δεύτερος νόμος του Newton, ο πρώτος όρος συμβολίζει την μεταβολή της ορμής ανά μονάδα όγκου του ρευστού και ο δεύτερος τον ρυθμό εισροής ή εκροής ορμής από την επιφάνεια του όγκου ελέγχου λόγω συναγωγής. Τέλος, στην τρίτη εξίσωση που συνιστά τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, ο πρώτος όρος δηλώνει την αύξηση της συνολικής ενέργειας στον όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου του ρευστού και ο δεύτερος τον ρυθμό εισόδου ή εξόδου της ενέργειας που περνά από την επιφάνεια ελέγχου λόγω συναγωγής.

Οι εξισώσεις Euler γράφονται για μία διάσταση,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (u(\rho E + p))}{\partial x} = 0, \quad (3.1c)$$

Για να κλείσει το πρόβλημα χρειάζεται να ορίσουμε την σχέση μεταξύ των θερμοδυναμικών μεταβλητών, την καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου,

$$p = \rho R T \quad (3.2)$$

όπου  $R$  και  $T$  η παγκόσμια σταθερή του ιδανικού αερίου και η θερμοκρασία σε Kelvin αντίστοιχα. Μία εναλλακτική έκφραση της καταστατικής εξίσωσης προκύπτει αν αντικαθιστούμε στην (3.2) τις σχέσεις,

$$R = (\gamma - 1)C_v, \quad (3.3)$$

$$C_v T = e \quad (3.4)$$

και

$$e = E - \frac{1}{2}u^2, \quad (3.5)$$

όπου  $\gamma$  ο λόγος της ισοβαρούς ειδικής θερμότητας του ρευστού  $C_p$  προς την ισόχωρη ειδική θερμότητα  $C_v$  και  $e$  η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού. Στην περίπτωση αυτή, η έκφραση της εξίσωσης του ιδανικού αερίου είναι,

$$p = (\gamma - 1)\rho[E - \frac{1}{2}(u^2)]. \quad (3.6)$$

Η διαδικασία που περιγράφουν οι παραπάνω εξισώσεις γίνεται αδιαβατικά και έρχονται σε συμφωνία με την σχέση που περιγράφει τις ισεντροπικές μεταβολές,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = ct \quad (3.7)$$

όπου  $ct$  μία σταθερή ποσότητα, κάτι που ισχύει κατά μήκος των ροϊκών γραμμών. Η σχέση (3.7) είναι συμβατή με την υπόθεση που έγινε παραπάνω, ότι οι όροι διάχυσης

είναι πολύ μικροί και μπορούν να παραλειφθούν και δείχνει ότι η εντροπία είναι σταθερή κατά μήκος των ροικών γραμμών. Στις ισεντροπικές ροές η πίεση μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση μόνο της πυκνότητας  $p = p(\rho)$ .

### 3.3 Διατύπωση γραμμικών ή ακουστικών εξισώσεων

Για να γραμμικοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.1) κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές. Γράφουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές τους ως άθροισμα δύο όρων. Μια μέση τιμή, χρονικά ανεξάρτητη, και μια μικρή μεταβολή που είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών του χρόνου και του χώρου,

$$\rho(x,t) = \bar{\rho}(x) + \rho'(x,t), \quad (3.8a)$$

$$u(x,t) = \bar{u}(x) + u'(x,t), \quad (3.8b)$$

$$p(x,t) = \bar{p}(x) + p'(x,t), \quad (3.8c)$$

όπου  $\bar{\rho}(x)$ ,  $\bar{u}(x)$  και  $\bar{p}(=p_a)$  είναι τα σταθερά χρονικά ανεξάρτητα μέρη και  $\rho'(x,t)$ ,  $u'(x,t)$  και  $p'(x,t)$  είναι τα χρονικά εξαρτημένα μέρη.

Για να γραμμικοποιηθούν οι εξισώσεις γίνονται οι παρακάτω προσεγγίσεις,

$$\rho'(x,t) \ll \bar{\rho}(x), \quad (3.9a)$$

$$u'(x,t) \ll c_s, \quad (3.9b)$$

$$p'(x,t) \ll \bar{p}(x), \quad (3.9c)$$

$$\bar{u}(x) = 0, \quad (3.9d)$$

όπου  $c_s$  είναι η ισεντροπική ταχύτητα του ήχου οριζόμενη ως,

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s. \quad (3.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.1a), (3.8a), (3.8b), (3.9a), (3.9c), και (3.9d) προκύπτουν,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}((\bar{\rho} + \rho')u') = 0. \quad (3.11)$$

Εκτελούμε τις πράξεις,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης και μηδενικούς προκύπτει,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας με την (3.10) και τα δύο μέλη της (3.13) και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial \rho'} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

ή

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} c_s^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (3.15)$$

Από τις εξισώσεις (3.1b), (3.8a), (3.8b), (3.8c), (3.9a), (3.9c) και (3.9d) και παραλείποντας όρους ανώτερης τάξης προκύπτει,

$$\frac{\partial}{\partial t}((\bar{\rho} + \rho')u') + \frac{\partial}{\partial x}((\bar{\rho} + \rho')(u')^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') = 0, \quad (3.16)$$

Εκτελούμε τις πράξεις,

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (u')^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + (u')^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{(u')^2}{\partial x} + \rho' \frac{\partial (u')^2}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0. \quad (3.17)$$

Παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης και μηδενικούς προκύπτει,

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (3.18)$$

Οι εξισώσεις (3.13), (3.15) και (3.18) συνιστούν τις ακουστικές εξισώσεις, οι οποίες είναι οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Euler. Από τις (3.13), (3.15) και (3.18) προκύπτουν με κατάλληλη επεξεργασία οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μικρές διαταραχές της πυκνότητας  $\rho'$ ,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x^2} = 0, \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial u'}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19b)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19c)$$

Οι εξισώσεις (3.19) είναι την μορφή της 2βάθμιας εξίσωσης κύματος. Είναι προφανές ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις κύματος με λύση της μορφής,

$$\rho'(x,t) = f(x - c_s t) + g(x + c_s t) \quad (3.20)$$

όπου  $f(x)$  και  $g(x)$  προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Επομένως, αφού οι διαταραχές είναι μικρές και ο ήχος είναι μια μικρή διαταραχή, η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται είναι η ταχύτητα του ήχου που δίδεται από την σχέση (3.10).

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις (3.13) και (3.15), με την βοήθεια της (3.18), γράφονται στην μορφή συστήματος,

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0}, \quad (3.21)$$

όπου

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} \rho' \\ \rho u' \end{Bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21a)$$

Η εξίσωση (3.21a) αποτελεί τις ακουστικές εξισώσεις. Οι αρχικές συνθήκες που συνοδεύουν το σύστημα (3.21) είναι της μορφής,

$$\underline{U}(x,0) = \begin{Bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{Bmatrix}. \quad (3.22)$$



Μπορούμε να αποσυζεύξουμε τις δύο εξαρτημένες μεταβλητές της (3.21) πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον αντίστροφο πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων, έστω  $\underline{\underline{P}}^{-1}$ , του  $\underline{\underline{A}}$ , και με τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων,  $\underline{\underline{P}}$ , από αριστερά. Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από την σχέση,

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad (3.23)$$

και προκύπτει μετά από πράξεις,

$$\lambda_{1,2} = \pm c_s. \quad (3.24)$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές το σύστημα είναι υπερβολικό. Τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν λύνοντας το σύστημα,

$$\underline{\underline{A}} - \lambda_{1,2} \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}} \quad (3.25)$$

και τα ιδιοδιανύσματα που παίρνουμε είναι,

$$\underline{\underline{n}}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ c_s \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{n}}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -c_s \end{Bmatrix}. \quad (3.26)$$

Άρα ο πίνακας  $\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_s & -c_s \end{bmatrix}$  και ο αντίστροφός του  $\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2c_s} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2c_s} \end{bmatrix}$ .

Στην συνέχεια θέτουμε,

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{U}} \quad (3.27)$$

ή

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{V}} \quad (3.27\alpha)$$

και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους προς το χρόνο και το χώρο,

$$\frac{\partial \underline{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{\underline{P}} \frac{\partial \underline{\underline{V}}}{\partial t}, \quad (3.28)$$

και



$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.29)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.28) και (3.29) στην (3.21) προκύπτουν δύο ανεξάρτητες μερικές διαφορικές εξισώσεις,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + P^{-1} A P \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

ή

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 \quad (3.30\alpha)$$

και

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0 \quad (3.30\beta)$$

Η αποσύνθεση των αρχικών συνθηκών γίνεται αντίστοιχα και προκύπτει,

$$U(x,t) = \begin{cases} f(x - c_s t) + g(x + c_s t) \\ f(x - c_s t) - g(x + c_s t) \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.4 Διατύπωση μη γραμμικών εξισώσεων διαταραχών πεπερασμένου πλάτους

Οι εξισώσεις (3.1a) και (3.1b) γράφονται στην μορφή,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.32\alpha)$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.32\beta)$$

Παρά το γεγονός ότι το ρευστό παρουσιάζει φαινόμενα πεπερασμένου πλάτους, είναι δυνατό, όπως έχει είδη ειπωθεί, να θεωρηθεί ότι η ταχύτητα και η πίεση είναι συναρτήσεις μόνο της πυκνότητας,

$$u = u(\rho) \quad (3.33)$$

και

$$p = p(\rho) \quad (3.34)$$

Μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.37)$$

και

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.38)$$

ή λόγο της εξάρτησης της πίεσης μόνο από την πυκνότητα,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.39)$$

Πλέον, αντικαθιστώντας τις (3.35), (3.36), (3.37) και (3.39) στην (3.32a) προκύπτει,

$$\frac{d\rho}{du} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.40a)$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.40b)$$

Με απλή αντικατάσταση της (3.40b) στην (3.40a) προκύπτει,

$$\rho \frac{du}{d\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.41)$$

ή

$$du = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (3.42)$$

Όπως προκύπτει για την σχέση (3.40b), γράφεται με την βοήθεια της (3.38),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} c^2 \frac{\rho}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.43a)$$

ή

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.43b)$$

όπου,

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (3.44)$$

Καθώς η διαταραχή γίνεται απειροστά μικρή η ποσότητα  $c$  τείνει στο μέγεθος  $c_s$ . Η αναλυτική λύση της (3.43b) είναι,

$$u(x, t) = f[x - (u + c)t]. \quad (3.45)$$

Η ταχύτητα  $c$  είναι συνάρτηση των  $x$  και  $t$ ,  $c = c(x, t)$  και δίδεται από την σχέση,

$$c = c_s \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (3.46)$$

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την σχέση (3.37) στην εξίσωση (3.32), προκύπτει

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{du}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.47a)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η εξίσωση (3.42) και συνάγεται η αντίστοιχη εξίσωση για την πυκνότητα,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + c) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (4.47b)$$

Η εξίσωση (3.47b) έχει αναλυτική λύση,

$$\rho(x, t) = f[x - (\rho + c)t]. \quad (3.48)$$

Είναι φανερό, πλέον από τις εκφράσεις (3.45) και (3.48), ότι η διαταραχή ταξιδεύει με διαφορετική ταχύτητα στον όγκο του ρευστού και εξαρτάται από την τοπική ταχύτητα του ρευστού! Αυτό αποτελεί και τη βασική διαφορά στην διάδοση διαταραχών πεπερασμένου πλάτους σε σχέση με την περίπτωση διάδοσης διαταραχών απειροστού πλάτους, όπου η διαταραχή ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα.

## Κεφάλαιο 4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ EULER ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται αριθμητικά σχήματα, ρητά και πεπλεγμένα, που επιλύουν τις εξισώσεις Euler ή ακουστικές, είτε ρητά, είτε πεπλεγμένα. Σκοπός είναι να αποκτηθεί εμπειρία και γνώση στην ευστάθεια και στην συμπεριφορά τους που θα χρησιμοποιηθεί στην μελέτη της σύζευξης.

Η λύση κάθε προβλήματος εξαρτάται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που τίθενται μαζί με την εξίσωση που πρόκειται να λυθεί. Αυτές έχουν άμεση δράση στην λύση του προβλήματος, η οποία πρέπει πάντα να τις ικανοποιεί. Στην αντίθετη περίπτωση το μαθηματικό πρόβλημα δεν έχει τεθεί σωστά.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Στην γενική τους μορφή γράφονται

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y),$$

όπου τα μεγέθη  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  και  $f$  είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$  και η εξίσωση είναι γραμμική. Η κάθε μία από τις τρεις μορφές παίρνει το όνομα μίας κωνικής τομής. Αν η ποσότητα

$$b^2 - 4ac > 0$$

τότε η εξίσωση είναι υπερβολική, εάν είναι

$$b^2 - 4ac = 0$$

είναι παραβολική και εάν είναι

$$b^2 - 4ac < 0$$

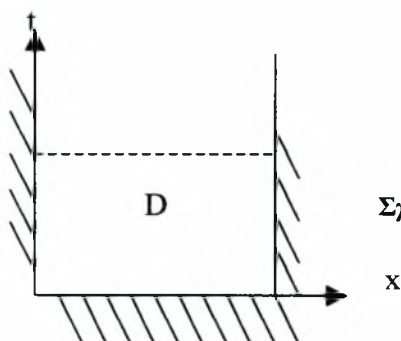
είναι ελλειπτική.

Κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά και απαιτεί διαφορετικές αρχικές ή οριακές συνθήκες για να είναι σωστά τεθημένο το πρόβλημα.

Η εξίσωση κύματος πρώτης τάξης ανήκει στην κατηγορία των υπερβολικών εξισώσεων και παρουσιάζει την ανάλογη συμπεριφορά. Οι χαρακτηριστικές της έχουν την μορφή

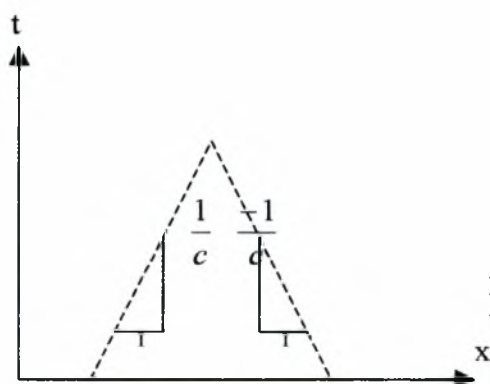
$$\frac{dx}{dt} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

και το πεδίο εξάρτησης της λύσης φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Πεδίο D εξάρτησης της λύσης.

Η λύση είναι ανοικτή μόνο στον χρόνο γι' αυτό και τέτοιου είδους προβλήματα λέγονται και προβλήματα διάδοσης. Κάθε άλλο σύνορο του πεδίου εξάρτησης είναι φραγμένο. Τα όρια αυτά δεν είναι άλλα από την αρχική και τις οριακές συνθήκες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος. Στο σχήμα 4.2 φαίνονται οι εξισώσεις που συνιστούν τις οδούς που μεταφέρονται οι πληροφορίες από το πεδίο εξάρτησης στο πεδίο της λύσης.



Σχήμα 4.2: Χαρακτηριστικές της εξίσωσης κύματος

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα παραπάνω στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος αναλύονται οι αριθμητικές μέθοδοι. Σε αυτή την περίπτωση καθοριστικό ρόλο για την συμπεριφορά του σχήματος έχουν οι ιδιοτιμές του πίνακα που παράγεται από την εφαρμογή του αντίστοιχου σχήματος. Η εξίσωση κύματος που επιλύεται σε αυτό το κεφάλαιο είναι υπερβολική και όπως στην αναλυτική εξίσωση η πληροφορία μεταφέρεται από το πεδίο εξάρτησης στο πεδίο επιρροής πάνω στις χαρακτηριστικές, όμοια και στην εξίσωση πεπερασμένων διαφορών η πληροφορία

από κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος μεταφέρεται στους γειτονικούς κόμβους που διατρέχονται από τις ίδιες χαρακτηριστικές ή και σε περισσότερους.

Η μέθοδος διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται είναι αυτή των πεπερασμένων διαφορών. Η διαφορική εξίσωση προσεγγίζεται με σχέσεις πεπερασμένων διαφορών που παράγονται από προσεγγίσεις με σειρές Taylor των παραγώγων. Κάθε τέτοια διακριτοποίηση πρέπει να είναι συνεπής, ευσταθής και να συγκλίνει. Για να είναι συνεπής πρέπει η διακριτοποίηση να γίνεται ακριβής καθώς το πλέγμα της πυκνώνει και τείνει να γίνει συνεχές. Η διαφορά της διακριτοποιημένης εξίσωσης με την ακριβή λέγεται σφάλμα αποκοπής. Πρέπει να μην μεγαθύνει τα σφάλματα προϊόντος του χρόνου ώστε να είναι ευσταθείς και τέλος η λύση που δίνει η διακριτοποιημένη εξίσωση να τείνει στην ακριβή καθώς το πλέγμα πυκνώνει, ώστε να συγκλίνει. Με  $N$  συμβολίζεται η αριθμητική λύση, με  $\varepsilon$  το σφάλμα αποκοπής και με  $D$  η ακριβής λύση που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση. Η σχέση που συνδέει τις τρεις αυτές μεταβλητές είναι,

$$N = D + \varepsilon. \quad (4.1)$$

και ως CFL ορίζεται,

$$CFL = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.2)$$

όπου  $C$  η ταχύτητα του κύματος,  $\Delta t$  το βήμα στον χρόνο και  $\Delta x$  το βήμα στον χώρο κατά την διακριτοποίηση. Ο αδιάστατος αριθμός  $CFL$  είναι πολύ σημαντικός και μας δίνει πολλές πληροφορίες για την κάθε μέθοδο.

## 4.2 Εξίσωση κύματος

Η εξίσωση κύματος είναι δυνατό να διακριτοποιηθεί και να προσεγγιστεί από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Το πρόβλημα της ευστάθειας στην αριθμητική ανάλυση είναι παρόμοιο με το πρόβλημα ευστάθειας στα συστήματα ελέγχου. Η συνάρτηση μεταφοράς σε ένα σύστημα ελέγχου παίζει τον ρόλο του διαφορικού τελεστή. Σε ένα πρόβλημα βηματισμού με αρχικές τιμές την χρονική στιγμή  $n$  ζητούνται τιμές την χρονική στιγμή  $n+1$ . Ο διαφορικός τελεστής αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς. Η ευστάθεια ενός τέτοιου συστήματος εξαρτάται από την συμπεριφορά του στα δεδομένα εισόδου της χρονικής στιγμής  $n$ . Στην συνέχεια θα μελετηθεί η εφαρμογή διάφορων αριθμητικών σχημάτων στην εξίσωση,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

### 4.2.1 Μέθοδος FTBS

Η εξίσωση (4.3) προσεγγίζεται από μια κατάντη διαφορά στο χρόνο και μια ανάντη διαφορά στο χώρο,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.4)$$

$$\eta \quad u_i^{n+1} = (1 - \nu)u_i^n - \nu u_{i-1}^n, \quad (4.5)$$

όπου,

$$\nu = CFL, \quad (4.6)$$

ο αριθμός Courant. Η (4.1) ικανοποιεί την (4.4),

$$\frac{D_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} - D_i^n - \varepsilon_i^n}{\Delta t} + c \frac{D_i^n + \varepsilon_i^n - D_{i-1}^n - \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.7)$$

$$\eta \quad \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} + c \frac{\varepsilon_i^n - \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.8)$$

διότι η  $D$  ικανοποιεί την (4.3) ως αναλυτική λύση της. Εφαρμόζοντας μία ανάλυση ευστάθειας τύπου Von Neumann το σφάλμα  $\varepsilon$  μπορούμε να υποθέσουμε πως γράφεται σαν μία δυναμοσειρά της μορφής,

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x}, \quad (4.9)$$

όπου η περίοδος της θεμελιώδους συχνότητας  $m=1$  είναι  $2L$ . Το διάστημα ενδιαφέροντος είναι μήκους  $L$  και ο αριθμός κύματος μπορεί να γραφτεί ως,

$$k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (4.10)$$

όπου  $M$  είναι ο αριθμός των  $\Delta x$  με τα οποία χωρίσαμε το  $L$ . Η εξίσωση (4.3) είναι γραμμική οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Εξετάζουμε την συμπεριφορά ενός μόνο όρου που συνιστά λύση της (4.3),

$$\varepsilon_m(x, t) = b_m(t) e^{ik_m x} = z^n e^{ik_m x} = e^{an\Delta t} e^{ik_m x} = e^{at} e^{ik_m x}, \quad (4.11)$$

όπου  $k_m$  είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο  $\alpha$  μιγαδικός. Αντικαθιστώντας την (4.13) στην (4.6) προκύπτει ότι,

$$e^{a\Delta t} = 1 - \nu + \nu \cos(k_m \Delta x) - i \nu \sin(k_m \Delta x). \quad (4.12)$$

Ο εκθετικός αυτός όρος περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο διαδίδεται το σφάλμα και ονομάζεται συντελεστής ενίσχυσης. Γράφοντας τον μιγαδικό αριθμό στην μορφή,

$$G = |G| e^{i\phi}, \quad (4.13)$$

προκύπτει ότι,

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\nu \sin(k_m \Delta x)}{1 - \nu + \nu \cos(k_m \Delta x)} \right), \quad (4.14)$$

και

$$|G| = \sqrt{(1 - \nu + \nu \cos(k_m \Delta x))^2 + (-\nu \sin(k_m \Delta x))^2}. \quad (4.15)$$

Ο  $|G|$  είναι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και η γωνία  $\phi$  είναι το όρισμα του μιγαδικού αριθμού. Δίδονται δε από τις σχέσεις,

$$|G| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (4.16)$$

και

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (4.17)$$

για τον μιγαδικό αριθμό  $G = \alpha + \beta i$ .

Η φυσική σημασία των συντελεστών  $|G|$  και  $\phi$  είναι το σφάλμα που εισάγει η αριθμητική μέθοδος και ο ηλεκτρονικός υπολογιστής. Τέτοια σφάλματα έχουν αποτέλεσμα την απόσβεση ή αριθμητική συνεκτικότητα όπως χαρακτηριστικά ονομάζεται, των αρχικών συνθηκών. Όσο μεγαλύτερης ακρίβειας είναι μια μέθοδος, τόσο μικρότερη είναι αυτή η αλλοίωση που εισάγει.



Για να βρούμε την ακριβή λύση της εξίσωσης κύματος θεωρούμε την λύση,

$$u = e^{at} e^{ik_m x}, \quad (4.18)$$

και εισάγοντάς την στην εξίσωση (4.3) προκύπτει,

$$a = -ik_m c, \quad (4.19)$$

άρα

$$u = e^{ik_m(x-ct)}. \quad (4.20)$$

Ο ακριβής συντελεστής ενίσχυσης είναι,

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{ik_m(x-c(t+\Delta t))}}{e^{ik_m(x-ct)}} = e^{i\phi_e}, \quad (4.21)$$

όπου,

$$\phi_e = -k_m c \Delta t. \quad (4.22)$$

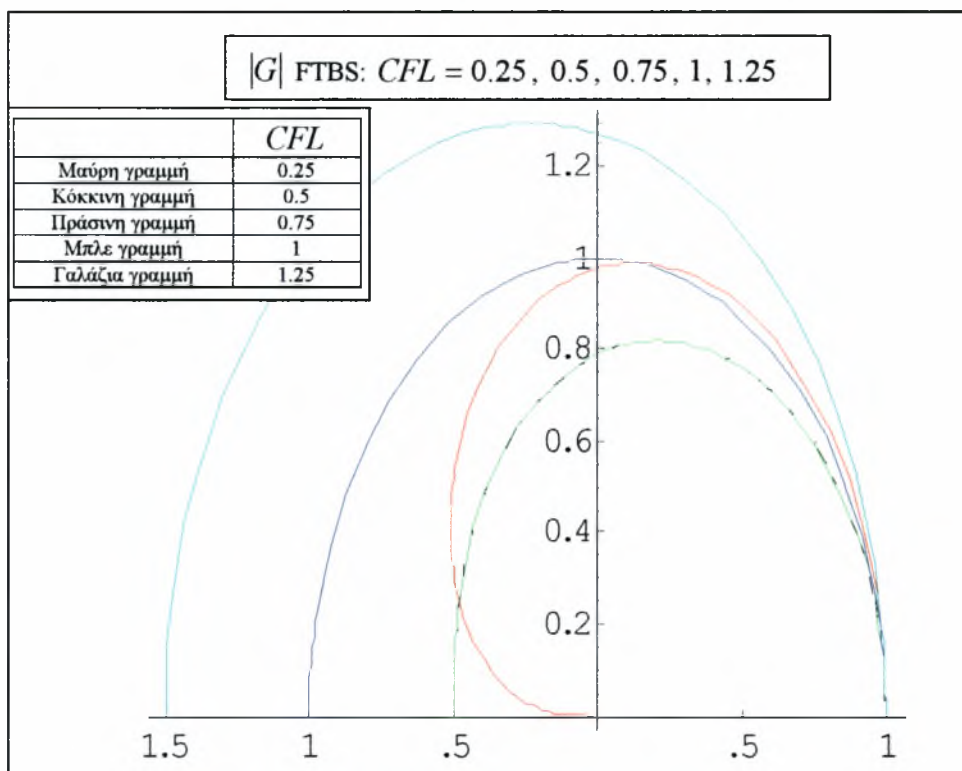
και  $|G_e| = 1$ . Επομένως η συνολική απώλεια δίνεται από την σχέση,

$$(1 - |G|^n) A_0, \quad (4.23)$$

όπου  $n$  τα χρονικά βήματα και  $A_0$  το αρχικό πλάτος. Αντίστοιχα η διαφορά (υστέρηση) φάσης που δημιουργείται δίνεται από την σχέση,

$$n(\phi_e - \phi). \quad (4.24)$$

Χρησιμοποιώντας  $k_m \Delta x = 0$  έως  $\pi$  και  $CFL = \nu = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  και  $1.25$  ο συντελεστής ενίσχυσης προκύπτει από την σχέση (4.15) και φαίνεται στο γράφημα 4.1.

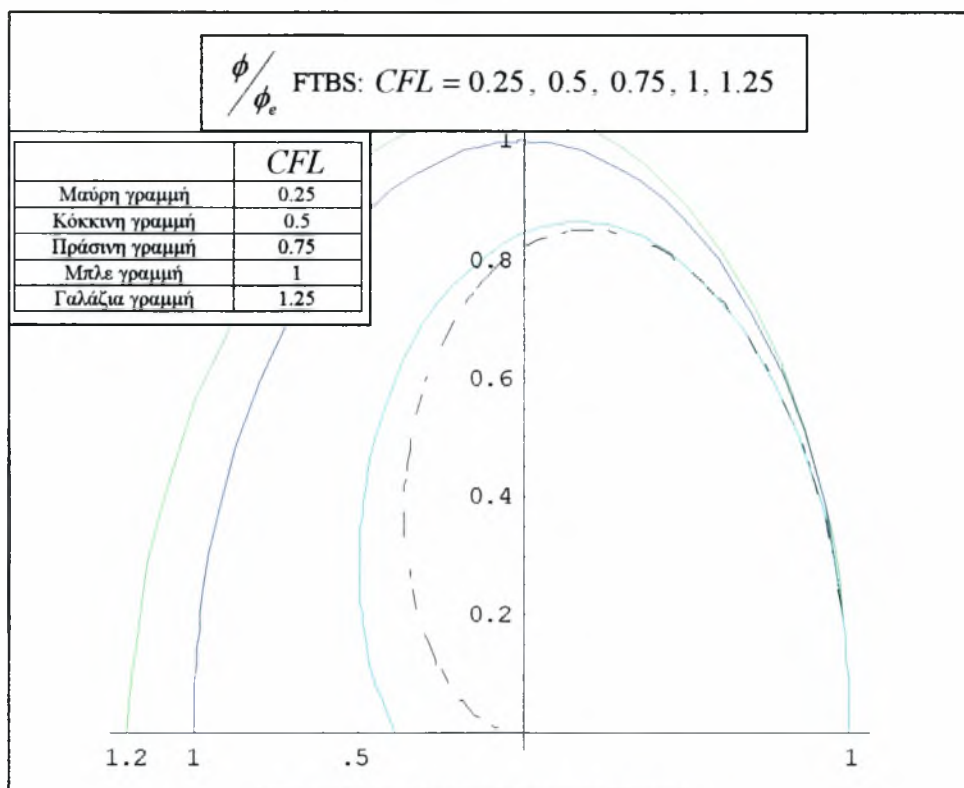


Γράφημα 4.1: Συντελεστής ενίσχυσης πλάτους.

Το γράφημα 4.1 απεικονίζει στο μιγαδικό επίπεδο, (όπου ο άξονας  $x$  είναι το πραγματικό μέρος των μιγαδικών αριθμών και ο  $y$  το φανταστικό), την συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος σε διάφορες περιοχές του αριθμού  $CFL$ . Για τιμές  $CFL < 1$  το σχήμα παρουσιάζει συντελεστή  $|G|$  μικρότερο της μονάδας και μείωση του αρχικού πλάτους  $A_0$ , για  $CFL = 1$  προκύπτει μηδενική μεταβολή του αρχικού πλάτους και για  $CFL > 1$  το σχήμα αυξάνει το αρχικό πλάτος και δεν συγκλίνει.

Ο λόγος των σχέσεων (4.14) και (4.22) δίνει την διαφορά (υστέρηση) φάσης που εισάγει το αριθμητικό σχήμα. Το γράφημα 4.2 παρουσιάζει τον λόγο αυτό για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών  $k_m \Delta x$  και  $CFL$ .

Όμοια συμπεριφορά με τον συντελεστή  $|G|$  παρουσιάζει και ο λόγος  $\frac{\phi}{\phi_e}$  στο γράφημα 4.2, όπου για  $CFL = 1$  είναι μηδενική η διαφορά, ενώ για  $CFL$  μεγαλύτερα και μικρότερα της μονάδας δημιουργείται προήγηση και υστέρηση φάσης αντίστοιχα.



Γράφημα 4.2: Λόγος διαφοράς φάσης.

#### 4.2.2 Μέθοδος MacCormack

Η εξίσωση (4.3) προσεγγίζεται από μια μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης, δύο βημάτων, τριών σημείων.

Πρόβλεψη:

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (4.25)$$

Διόρθωση:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_i^n + u_i^{\overline{n+1}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}}) \right], \quad (4.26)$$

$$\text{ή} \quad u_i^{n+1} = \frac{\nu}{2} (1 - \nu) u_{i-1}^n + (1 - \nu^2) u_i^n + \frac{\nu}{2} (\nu - 1) u_{i+1}^n. \quad (4.27)$$

Η (4.3) ικανοποιεί την (4.27).

$$D_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\nu + \nu^2)(D_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) + (1 - \nu^2)(D_i^n + \varepsilon_i^n) + \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu)(D_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) \quad (4.28)$$

ή

$$\varepsilon_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\nu + \nu^2)\varepsilon_{i-1}^n + (1 - \nu^2)\varepsilon_i^n + \frac{1}{2}(\nu^2 - 1)\varepsilon_{i+1}^n, \quad (4.29)$$

διότι η  $D$  ικανοποιεί την (4.3) ως αναλυτική λύση της. Το σφάλμα  $\varepsilon$  υπολογίζεται όπως και στην προηγούμενη μέθοδο με την χρήση της δυναμοσειράς (4.9) και για το ίδιο διάστημα ενδιαφέροντος προκύπτει από την (4.3) λύση της μορφής (4.11). Τελικά αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (4.29) προκύπτει

$$e^{a\Delta t} = 1 - \nu^2 + \nu^2 \cos(k_m \Delta x) - i\nu \sin(k_m \Delta x), \quad (4.30)$$

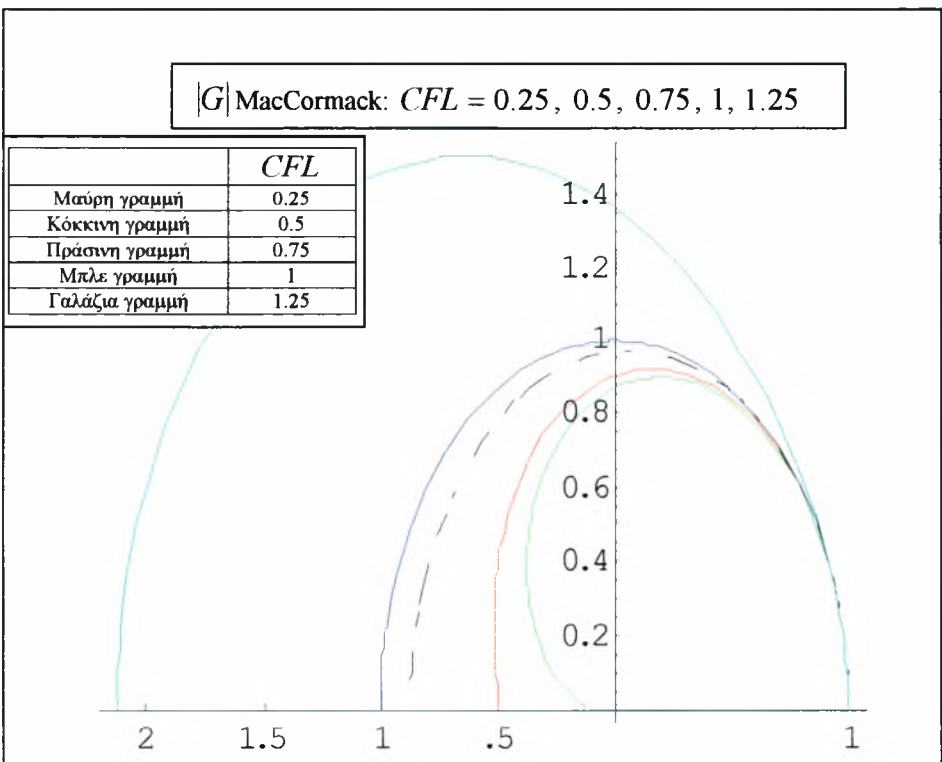
$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\nu \sin(k_m \Delta x)}{1 - \nu^2 + \nu^2 \cos(k_m \Delta x)} \right) \quad (4.31)$$

και

$$|G| = \sqrt{(1 - \nu^2 + \nu^2 \cos(k_m \Delta x))^2 + (-\nu \sin(k_m \Delta x))^2}. \quad (4.32)$$

Όμοια υπολογίζουμε τους συντελεστές  $\phi$  και  $|G|$ , από τις σχέσεις (4.31) και (4.32) αντίστοιχα.

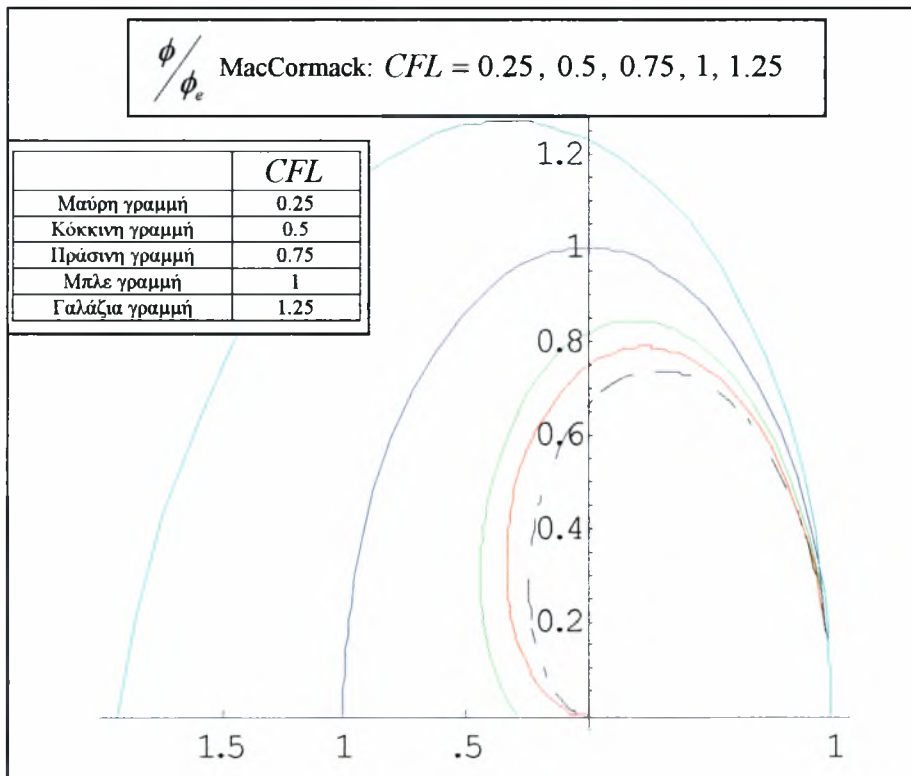
Χρησιμοποιώντας τα γνωστά  $k_m \Delta x$  και  $CFL$ , ο συντελεστής ενίσχυσης προκύπτει από την σχέση (4.32) και φαίνεται στο γραφήματα 4.3 .



**Γράφημα 4.3:** Συντελεστής ενίσχυσης πλάτους.

Το γράφημα 4.3 απεικονίζει στο μιγαδικό επίπεδο, όπου ο άξονας τον  $x$  είναι το πραγματικό μέρος των μιγαδικών αριθμών και ο  $y$  το φανταστικό, την συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος σε διάφορες περιοχές του αριθμού  $CFL$ . Για τιμές  $CFL < 1$  το σχήμα παρουσιάζει συντελεστή  $|G|$  μικρότερο της μονάδας και μείωση του αρχικού πλάτους  $A_0$ , για  $CFL = 1$  προκύπτει μηδενική μεταβολή του αρχικού πλάτους και για  $CFL > 1$  το σχήμα αυξάνει το αρχικό πλάτος και δεν συγκλίνει.

Ο λόγος των σχέσεων (4.31) και (4.14) δίδει την διαφορά (υστέρηση) φάσης που εισάγει το αριθμητικό σχήμα. Το γράφημα 4.4 παρουσιάζει τον λόγο αυτό για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών  $k_m \Delta x$  και  $CFL$ .



**Γράφημα 4.4:** Λόγος διαφοράς φάσης.

Ο λόγος  $\frac{\phi}{\phi_e}$  στο γράφημα 4.4 για  $CFL = 1$  είναι μονάδα, δηλαδή μηδενική η διαφορά φάσης, ενώ για  $CFL$  μεγαλύτερα και μικρότερα της μονάδας δημιουργείται προήγηση και υστέρηση αντίστοιχα.

### 4.2.3 Μέθοδος Lax

Η εξίσωση (4.3) προσεγγίζεται από μια μέθοδο δύο βημάτων, δύο σημείων.

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.33)$$

ή

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \nu)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)u_{i+1}^n. \quad (4.34)$$

Η (4.1) ικανοποιεί την (4.34),

$$D_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \nu)(D_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(1 - \nu)(D_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n), \quad (4.35)$$

ή

$$\varepsilon_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\nu + 1)\varepsilon_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)\varepsilon_{i+1}^n, \quad (4.36)$$

διότι η  $D$  ικανοποιεί την (4.3) ως αναλυτική λύση της. Το σφάλμα  $\varepsilon$  υπολογίζεται όπως και στην προηγούμενη μέθοδο με την χρήση της δυναμοσειράς (4.9) και για το ίδιο διάστημα ενδιαφέροντος προκύπτει από την (4.3) λύση της μορφής (4.11). Τελικά αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (4.36) προκύπτει

$$e^{a\Delta t} = \cos(k_m \Delta x) - i\nu \sin(k_m \Delta x), \quad (4.37)$$

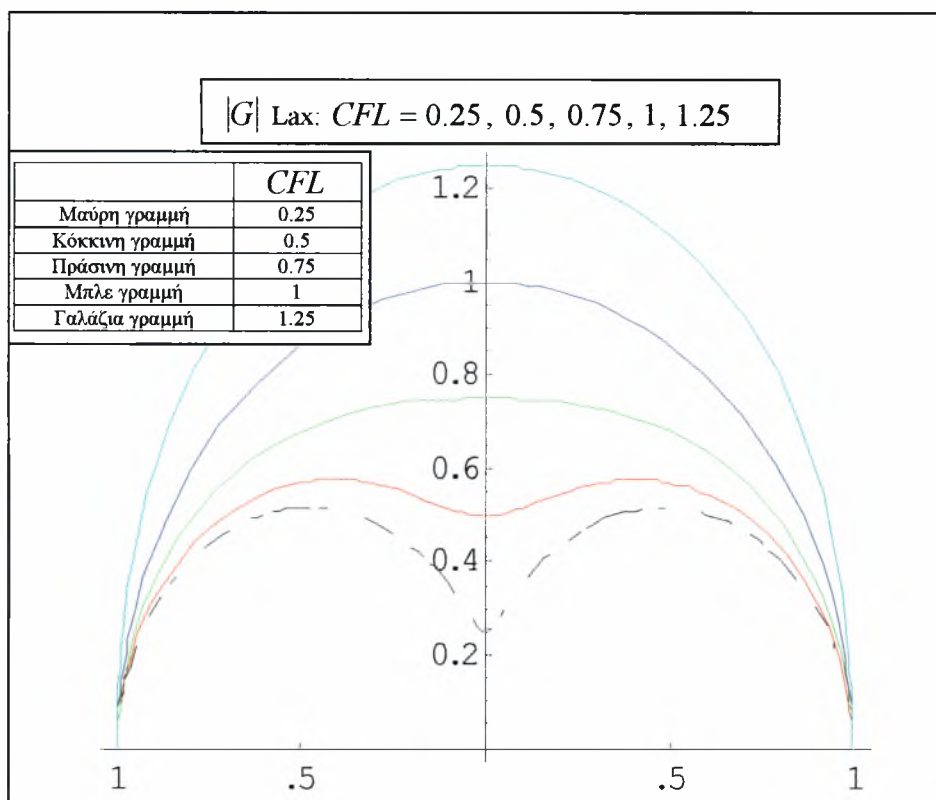
$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\nu \sin(k_m \Delta x)}{\cos(k_m \Delta x)} \right) \quad (4.38)$$

και

$$|G| = \sqrt{(\cos(k_m \Delta x))^2 + (-\nu \sin(k_m \Delta x))^2}. \quad (4.42)$$

Όμοια υπολογίζουμε τους συντελεστές  $|G|$  και  $\phi$ , από τις σχέσεις (4.39) και (4.38) αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τα γνωστά  $k_m \Delta x$  και  $CFL$ , ο συντελεστής ενίσχυσης προκύπτει από την σχέση (4.39) και φαίνεται στο γράφημα 4.5.

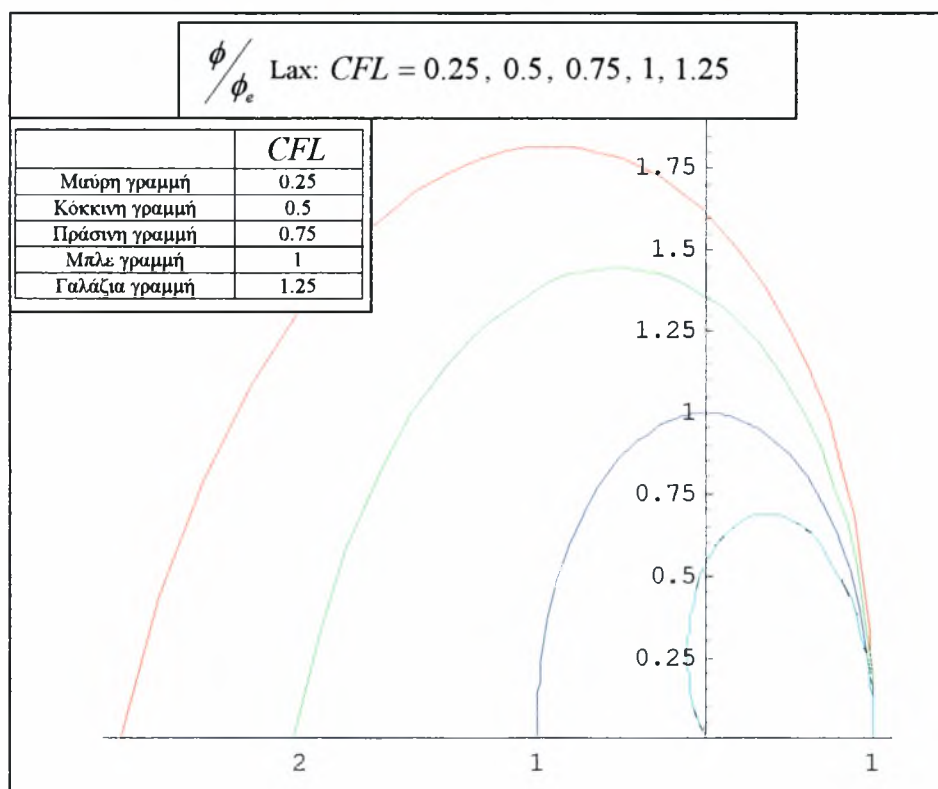


**Γράφημα 4.5:** Συντελεστής ενίσχυσης πλάτους

Το γράφημα 4.5 απεικονίζει στο μιγαδικό επίπεδο, όπου ο άξονας τον  $x$  είναι το πραγματικό μέρος των μιγαδικών αριθμών και ο  $y$  το φανταστικό, την συμπεριφορά του αριθμητικού σχήματος σε διάφορες περιοχές του αριθμού  $CFL$ . Για τιμές  $CFL < 1$  το σχήμα παρουσιάζει συντελεστή  $|G|$  μικρότερο της μονάδας και μείωση του αρχικού πλάτους  $A_0$ , για  $CFL = 1$  προκύπτει μηδενική μεταβολή του αρχικού πλάτους και για  $CFL > 1$  το σχήμα αυξάνει το αρχικό πλάτος και δεν συγκλίνει.

Ο λόγος των σχέσεων (4.38) και (4.14) δίδει την διαφορά (υστέρηση) φάσης που εισάγει το αριθμητικό σχήμα. Το γράφημα 4.6 παρουσιάζει τον λόγο αυτό για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών  $k_{\underline{m}}\Delta x$  και  $CFL$ .





Γράφημα 4.6: Λόγος διαφοράς φάσης.

Ο λόγος  $\frac{\phi}{\phi_e}$  στο γράφημα 4.6 για  $CFL = 1$  είναι μονάδα και αντιστοιχεί σε μηδενική διαφορά φάσης, ενώ για  $CFL$  μεγαλύτερα και μικρότερα της μονάδας και αντιστοιχεί σε προήγηση και υστέρηση αντίστοιχα.

#### 4.2.4 Μέθοδος Euler Implicit

Η εξίσωση (4.3) προσεγγίζεται από μια επαναληπτική μέθοδο τριών σημείων.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0, \quad (4.40)$$

ή

$$u_i^n = \frac{V}{2} u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{V}{2} u_{i+1}^{n+1}. \quad (4.41)$$

Η (4.1) ικανοποιεί την (4.41),

$$D_i^n + \varepsilon_i^n = \frac{V}{2} (D_{i-1}^{n+1} + \varepsilon_{i-1}^{n+1}) + D_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} - \frac{V}{2} (D_{i+1}^{n+1} + \varepsilon_{i+1}^{n+1}), \quad (4.42)$$



$$\varepsilon_i^n = \frac{V}{2} \varepsilon_{i-1}^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} - \frac{V}{2} \varepsilon_{i+1}^{n+1}, \quad (4.43)$$

διότι η  $D$  ικανοποιεί την (4.3) ως αναλυτική λύση της. Το σφάλμα  $\varepsilon$  υπολογίζεται όπως και στην προηγούμενη μέθοδο με την χρήση της δυναμοσειράς (4.9) και για το ίδιο διάστημα ενδιαφέροντος προκύπτει από την (4.3) λύση της μορφής (4.11). Τελικά αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (4.43) προκύπτει,

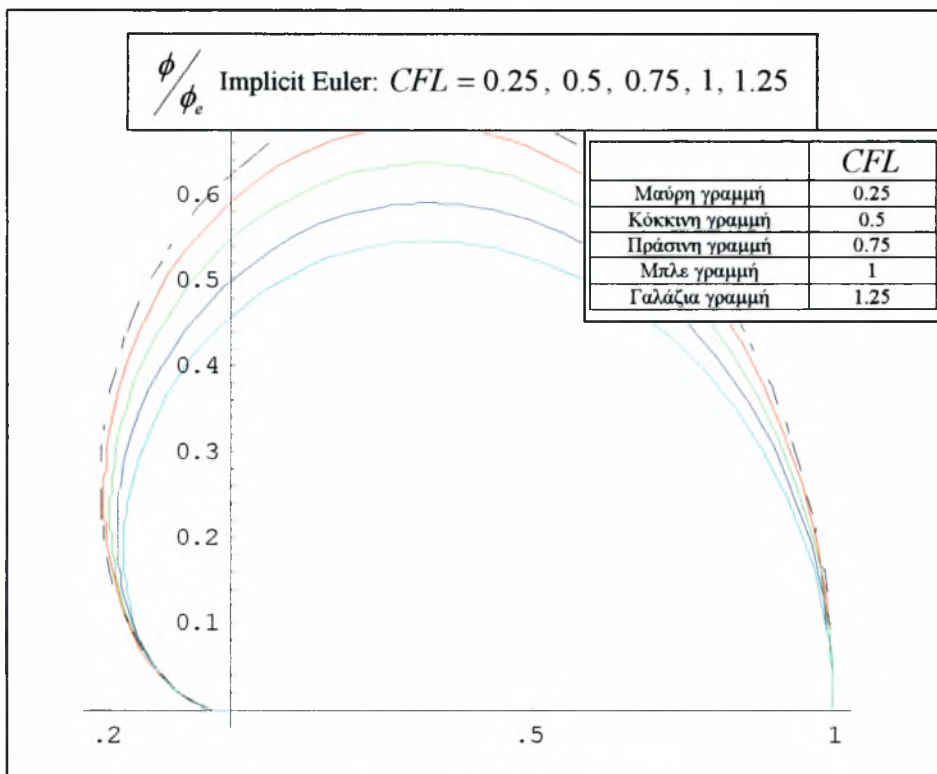
$$e^{a\Delta t} = \frac{\cos(k_m \Delta x) - i\nu \sin(k_m \Delta x)}{\cos^2(k_m \Delta x) + \nu^2 \sin^2(k_m \Delta x)}, \quad (4.44)$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\nu \sin(k_m \Delta x)) \quad (4.45)$$

και

$$|G| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \nu^2 \sin^2(k_m \Delta x)}\right)^2 + \left(\frac{-\nu \sin(k_m \Delta x)}{1 + \nu^2 \sin^2(k_m \Delta x)}\right)^2} = 1. \quad (4.46)$$

Ο λόγος των σχέσεων (4.45) και (4.14) δίνει την διαφορά (υστέρηση) φάσης που εισάγει το αριθμητικό σχήμα. Το γράφημα 4.7 παρουσιάζει τον λόγο αυτό για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών  $k_m \Delta x$  και  $CFL$ .



Γράφημα 4.7: Λόγος διαφοράς φάσης.

Ο λόγος  $\frac{\phi}{\phi_e}$  στο γράφημα 4.7 για κάθε  $CFL$  είναι μικρότερος από την μονάδα και αντιστοιχεί σε υστέρηση.

4.2.5 Σχολιασμός και σύγκριση των τεσσάρων μεθόδων

Η σύγκριση των τεσσάρων μεθόδων και τα αναμενόμενα αποτελέσματα υποβοηθούνται με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε αρχική συνθήκη,

$$u(x,0) = \sin(6\pi x) . \tag{4.47}$$

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης (4.3) με αρχική συνθήκη την (4.47) είναι η,

$$u(x,t) = \sin(6\pi(x-ct)) , \tag{4.48}$$

όπου για τα παρακάτω παραδείγματα θεωρούμε  $c = 0.75$  . Στην συνέχεια παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1 όλες τις τεχνικές για το δέκατο βήμα.

Μέγεθος\Μέθ οδος	FTBS	MacCormack	Lax	Euler Implicit
$\varphi$	-0.28359	-0.279902	-0.288865	-0.269382
$\phi_e$	-0.28274	-2.28274	-0.28274	-0.28274
$10(\phi_e - \phi)$	0.008446	-0.028383	0.059126	-0.13357
$ G $	0.98674	0.99939	0.969903	1
$(1 -  G ^{10})A_0$	0.1249	0.006053	0.26331	0

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα των τεσσάρων μεθόδων.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα είναι φανερό πως οι τρεις πρώτες μέθοδοι, FTBS, MacCormack και Lax δεν είναι πάντα συνεπείς και συγκλίνουν μόνο όταν  $CFL \leq 1$  . Αντίθετα το πεπλεγμένο σχήμα Euler συγκλίνει για κάθε  $CFL$  . Μικρότερη μείωση του αρχικού πλάτους παρουσιάζει η πεπλεγμένη μέθοδος Euler, και αμέσως μικρότερο η MacCormack, ενώ οι άλλες δύο παρουσιάζουν σημαντικό σφάλμα προϊόντος του χρόνου. Η διαφορά φάσης και στα τέσσερα σχήματα για  $CFL = 1$  είναι μηδενική και για  $CFL > 1$  και  $CFL < 1$  παρουσιάζουν προήγηση και υστέρηση αντίστοιχα. Γενικά, η μέθοδος Implicit Euler δίνει τα καλύτερα και πιο κοντά στην αναλυτική λύση αποτελέσματα για κάθε  $CFL$  .

### 4.3 Εξίσωση Burgers

Η εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.49)$$

ονομάζεται Burgers μη συνεκτικού ρευστού, είναι μη γραμμική και η μελέτη της είναι σημαντική διότι εμφανίζεται κατά την επίλυση των εξισώσεων Euler (3) στην περίπτωση όπου λύνεται το μη γραμμικό πρόβλημα της ροής και εκφράζει την αρχή διατήρησης της ορμής. Στην περίπτωση της χρησιμοποιείται ειδικό πλέγμα, κινούμενο ώστε να επιτευχθεί ακριβέστερη και γρηγορότερα λύση. Εδώ γίνεται η κατάστρωση του προβλήματος στην απλή του μορφή και χρησιμοποιείται τετραγωνικό πλέγμα στο χώρο και χρόνο.

#### 4.3.1 Μέθοδος FTBS

Η εξίσωση (4.49) προσεγγίζεται από μια κατάντη διαφορά στο χρόνο και μια ανάντη διαφορά στο χώρο,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.50)$$

ή

$$u_i^{n+1} = \frac{V}{2} (u_{i-1}^n)^2 u_i^n - \frac{V}{2} (u_i^n)^2. \quad (4.51)$$

Αποδεικνύεται ότι το σχήμα είναι ευσταθές όταν ισχύει,

$$\left| u_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (4.52)$$

#### 4.3.2 Μέθοδος MacCormack

Η εξίσωση (4.49) προσεγγίζεται από μια μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης, δύο βημάτων, τριών σημείων.

Πρόβλεψη:

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - \frac{\nu_1}{2} \left( (u_{i+1}^n)^2 - (u_i^n)^2 \right), \quad (4.53a)$$

Διόρθωση:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_i^n + u_i^{\overline{n+1}} - \frac{\nu_1}{2} \left( u_i^{\overline{n+1}} - u_{i-1}^{\overline{n+1}} \right) \right]. \quad (4.53b)$$

ή

$$u_i^{n+1} = \frac{\nu_1}{2} \left[ \nu_1 u_{i-1}^n + (2 - \nu_1) u_i^n + \nu_1 \frac{1 - \nu_1}{2} (u_i^n)^2 + \nu_1 \frac{\nu_1 - 1}{2} (u_{i+1}^n)^2 \right], \quad (4.54)$$

όπου  $\nu_1$  ο λόγος  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Αποδεικνύεται ότι το σχήμα είναι ευσταθές όταν ισχύει,

$$\left| u_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

### 4.3.3 Μέθοδος Lax

Η εξίσωση (4.49) προσεγγίζεται από μια μέθοδο ενός βήματος, δύο σημείων.

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2 \Delta x} = 0, \quad (4.55)$$

ή

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) - \frac{\nu}{4} \left( (u_{i-1}^n)^2 - (u_{i+1}^n)^2 \right). \quad (4.56)$$

Αποδεικνύεται ότι το σχήμα είναι ευσταθές όταν ισχύει

$$\left| u_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

### 4.3.4 Μέθοδος Euler Implicit

Η εξίσωση (4.49) προσεγγίζεται από μια επαναληπτική μέθοδο τριών σημείων.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1}^{n+1})^2 - (u_{i-1}^{n+1})^2}{\Delta x} = 0, \quad (4.57a)$$

ή

$$-\frac{V_1}{4} u_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^n + u_i^{n+1} - \frac{V_1}{4} u_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^n = \frac{V_1}{4} (u_{i-1}^n)^2 + u_i^n - \frac{V_1}{4} (u_{i+1}^n)^2. \quad (4.57b)$$

Το σχήμα συγκλίνει πάντα για κάθε  $\Delta t$  και  $\Delta x$ . Για να γίνει πιο ομαλή η συμπεριφορά του προστίθεται τεχνητός όρος,

$$-\frac{\omega}{8} (u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n), \quad (4.58)$$

όπου το  $\omega$  είναι αυθαίρετος συντελεστής και παίρνει τιμές  $0 < \omega \leq 1$ .

### 4.3.5 Σχολιασμός και σύγκριση των τεσσάρων μεθόδων

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν εφαρμόζοντας τις τέσσερις μεθόδους στην μη γραμμική εξίσωση είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.2. Η μέθοδος MacCormack παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα καθώς είναι τάξης  $O(\Delta t)^2$  στον χρόνο σε αντίθεση με τις άλλες τρεις που είναι ακρίβειας  $O(\Delta t)$ .

## 4.4 Συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού

Η εξίσωση (3.21) συνιστά ένα σύστημα δύο πρωτοβάθμιων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτές εφαρμόζοντας τις τέσσερις αριθμητικές μεθόδους FTBS, MacCormack, Lax και Implicit Euler προκύπτουν ισάριθμα αριθμητικά σχήματα.

### 4.4.1 Μέθοδος FTBS

Διακριτοποιώντας την εξίσωση (3.21) σύμφωνα με το σχήμα FTBS προκύπτουν οι εξισώσεις,

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.59a)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ w_i^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^n \\ w_i^n \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^n - u_i^{n+1} \\ w_i^n - w_i^{n+1} \end{Bmatrix}. \quad (4.59b)$$

Οι τελικές σχέσεις που προκύπτουν μετά από τις πράξεις είναι,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_i^n - w_{i-1}^n) \\ w_i^{n+1} &= w_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι οι (3.22).

#### 4.4.2 Μέθοδος MacCormack

Διακριτοποιώντας την εξίσωση (3.21) σύμφωνα με το σχήμα MacCormack, που είναι δύο βημάτων, προκύπτουν οι εξισώσεις,

Πρόβλεψη:

$$\overline{U}_i^{n+1} = \underline{U}_i^n - A(\underline{U}_{i+1}^n - \underline{U}_i^n) \quad (4.61a)$$

Διόρθωση:

$$\underline{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \underline{U}_i^n + \overline{U}_i^{n+1} - A(\overline{U}_i^{n+1} - \overline{U}_{i-1}^{n+1}) \right) \quad (4.61b)$$

Οι τελικές σχέσεις που προκύπτουν μετά από τις πράξεις είναι,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( v^2 (u_{i-1}^n - u_i^n + u_{i+1}^n) + u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{i-1}^n - w_{i+1}^n) \right) \\ w_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( v^2 (w_{i-1}^n - w_i^n + w_{i+1}^n) + w_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι οι (3.22).

#### 4.4.3 Μέθοδος Lax

Διακριτοποιώντας την εξίσωση (3.21) σύμφωνα με το σχήμα Lax προκύπτουν οι εξισώσεις,

$$\frac{\underline{U}_i^{n+1} - \frac{1}{2}(\underline{U}_{i+1}^n - \underline{U}_{i-1}^n)}{\Delta t} + \underline{A} \frac{\underline{U}_i^n - \underline{U}_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.63a)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ w_i^{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{i+1}^n \\ w_{i+1}^n \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{i-1}^n \\ w_{i-1}^n \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \\ w_{i+1}^n - w_{i-1}^n \end{Bmatrix}. \quad (4.63b)$$

Οι τελικές σχέσεις που προκύπτουν μετά από τις πράξεις είναι

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(w_{i-1}^n - w_{i+1}^n) \\ w_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(w_{i-1}^n + w_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι οι (3.22).

#### 4.4.4 Μέθοδος Implicit Euler

$$\frac{\underline{U}_i^{n+1} - \underline{U}_i^n}{\Delta t} + \underline{A} \frac{\underline{U}_i^{n+1} - \underline{U}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (4.65a)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} u_i^n \\ w_i^n \end{Bmatrix} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1}^{n+1} \\ w_{i-1}^{n+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ w_i^{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1}^{n+1} \\ w_{i+1}^{n+1} \end{Bmatrix}. \quad (4.65b)$$

Οι τελικές σχέσεις που προκύπτουν μετά από τις πράξεις είναι,

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^n &= u_i^n \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta x} w_{i-1}^{n+1} + w_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} w_{i+1}^n &= w_i^n \end{aligned} \quad (4.66)$$

Οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι οι (3.22).

#### 4.5 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Τόσο στην αναλυτική λύση όσο και στις αριθμητικές λύνονται δύο ομάδες συνοριακών συνθηκών. Η πρώτη χρησιμοποιεί περιοδικές συνοριακές συνθήκες και η δεύτερη μη περιοδικές. Και στις δύο περιπτώσεις η αρχική συνθήκη είναι τριγωνομετρική συνάρτηση, συνήθως με περίοδο  $6\pi$ .

Οι περιοδικές οριακές συνθήκες απαιτούν η λύση να παρουσιάζει ίδια προφίλ στα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$ , ανεξάρτητα από την αρχική συνθήκη, για κάθε χρονική στιγμή. Οι μη περιοδικές οριακές συνθήκες επιτρέπουν διαφορετικές τιμές για την λύση στα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$ , προϊόντος του χρόνου.

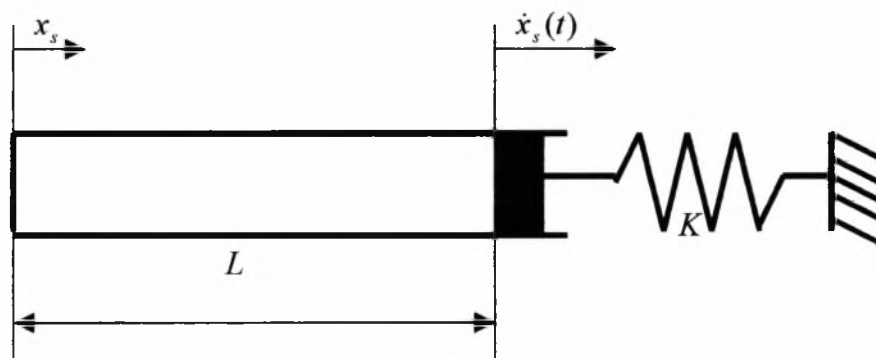


### 5.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η παρακάτω ανάλυση παρουσιάζει ενδιαφέρων καθώς διερευνάται εάν είναι δυνατό ασταθείς, υπολογιστικά, ρευστοδυναμικοί αλγόριθμοι να συζευχθούν με ασταθείς, υπολογιστικά, αλγορίθμους δυναμικής κατασκευών με εύρωστα αποτελέσματα στο πεδίο της αεροελαστικότητας. Πολύ μεγάλης κλίμακας τρισδιάστατοι υπολογισμοί απαιτούνται για τον ακριβή υπολογισμό ταλαντώσεων σε στροβιλομηχανές και αεροσκάφη. Μία προσέγγιση είναι ο πλήρως πεπλεγμένη διακριτοποίηση των μοντέλων του ρευστού και της κατασκευής σαν ένα συνεχές δυναμικό πρόβλημα που διέπεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις και ικανοποιεί οριακές συνθήκες. Αυτές είναι η εξίσωση κίνησης για την κατασκευή και οι εξισώσεις Navier-Stokes για το ρευστό. Κάθε ένα από τα δύο αυτά προβλήματα έχει το δικό του χαρακτηριστικό μήκος και την δική του χρονική κλίμακα. Για τον λόγο αυτό η παραγωγή ενός τέτοιου αλγορίθμου υπολογισμού αεροελαστικών προβλημάτων απαιτεί τουλάχιστον την ίδια, σε έκταση, δουλειά που απαιτεί η δημιουργία ανεξάρτητων προγραμμάτων επίλυσης του ρευστού και της κατασκευής. Εφόσον οι υπάρχοντες κώδικες υπολογίζουν με ακρίβεια και αποτελεσματικά αυτά τα προβλήματα η πιο πρακτική προσέγγιση είναι να διερευνηθεί πως συζευγνούνται αποτελεσματικότερα τέτοιοι κώδικες για την ανάλυση αεροελαστικών προβλημάτων. Δύο είναι τα σημεία προσοχής σε αυτή την προσέγγιση. Το πρώτο να διερευνηθεί εάν εισάγεται κίβδηλη αριθμητική αστάθεια και το δεύτερο είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Δύο προβλήματα που προσφέρονται για ανάλυση είναι αυτό της παράλληλης ροής σε επίπεδο τοίχωμα [5] και το πρόβλημα του εμβόλου [7]. Και τα δύο προβλήματα περιγράφονται από εξισώσεις υψηλού βαθμού ομοιότητας.

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας αναλύεται το πρόβλημα του εμβόλου, όπως προτάθηκε από τους Biot F.J. και Leyland P. [7]. Η διάταξη συνίσταται από έναν αγωγό που έχει φραγμένο με ακλόνητο τοίχωμα το αριστερό άκρο του. Στο δεξιό άκρο του είναι τοποθετημένο το έμβολο μάζας  $m$  συνδεδεμένο με ένα ελατήριο ακαμψίας  $K$ .



Σχήμα 5.1: Το πρόβλημα του εμβόλου.

Μέσα στον θάλαμο του εμβόλου υπάρχει ένα μη συνεκτικό και συμπιεστό ρευστό σε ηρεμία. Αρχικά το έμβολο διεγείρεται με μια αρχική ταχύτητα. Καθώς στο σύνορο υπάρχει το αέριο, το διεγείρει, που με την σειρά του αλλάζει κατάσταση και διεγείρει τον ταλαντωτή. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται και σε κάθε κύκλο μεταξύ των δύο συστημάτων εναλλάσσεται ενέργεια. Αυτό συνιστά την σύζευξη των δύο συστημάτων που, πλέον, αποκτούν νέα χαρακτηριστικά και η νέα τους συμπεριφορά είναι σημαντικά διαφορετική από αυτή που είχε το κάθε ένα ξεχωριστά.

Το σχήμα 5.1 παρουσιάζει την διάταξη και το σύστημα αξόνων που χρησιμοποιήθηκε. Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με τρεις τρόπους. Αρχικά με αναλυτικό και στην συνέχεια με αριθμητικό. Χρησιμοποιούνται μετατοπισμένοι και πλήρως συζευγμένοι πεπλεγμένοι αλγόριθμοι.

Οι παράμετροι του προβλήματος, για τους παρακάτω υπολογισμούς, φαίνονται στον πίνακα 5.1 .

Πίνακας 5.1:Παράμετροι του προβλήματος του εμβόλου.

$L$	$1\ m$	Μήκος δοχείου ρευστού
$\bar{\rho}$	$1.3\ \frac{kg}{m^3}$	Πυκνότητα ρευστού
$c_s$	$328.17\ \frac{m}{sec}$	Ισεντροπική ταχύτητα του ήχου
$p_a$	$10^5\ Pa$	Ατμοσφαιρική πίεση
$area$	$1\ m^2$	Επιφάνεια εμβόλου
$\omega_n$	$100\ \frac{rad}{sec}$	Ιδιοσυχνότητα εμβόλου
$m$	$0.8\ Kg$	Μάζα εμβόλου
$\gamma$	$1.4$	Λόγος ειδικών θερμοτήτων

5.2 Αναλυτική λύση

Το πλάτος-μετατόπισης του εμβόλου ορίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα και περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Newton ,

$$m\ddot{x}_s(i) + Kx_s(i) = f(i), \tag{5.1}$$

όπου  $x_s(t)$  και  $\ddot{x}_s(t)$  η μετατόπιση και η επιτάχυνση της κατασκευής (έμβολο), ενώ  $f(t)$  είναι η εξωτερική διέγερση. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης είναι η αδράνεια του εμβόλου, ενώ ο δεύτερος είναι η ακαμψία του. Η διέγερση  $f(t)$  είναι ίση με την δύναμη που προκαλείται από την διαφορά στις δύο πλευρές του εμβόλου πολλαπλασιασμένη με την επιφάνεια του,

$$f(t) = (p(L, t) - p_a) area, \quad (5.2)$$

όπου η θεωρούμενη επιφάνεια λαμβάνεται μοναδιαία για λόγους ευκολίας,  $p_a$  είναι η εξωτερική πίεση και  $p_L(t)$  η πίεση στο σημείο  $x = L$ .

Η ακαμψία του ελατηρίου μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$K = m\omega_n^2, \quad (5.3)$$

όπου  $\omega_n$  η ιδιοσυχνότητα του ελατηρίου.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό είναι οι ακουστικές εξισώσεις. Οι συνοριακές συνθήκες του ρευστού δίνονται από τις σχέσεις,

$$u(0, t) = 0, \quad (5.4a)$$

$$u(L, t) = \dot{x}_s(t), \quad (5.4b)$$

όπου  $\dot{x}_s(t)$  η ταχύτητα του εμβόλου.

Τώρα οι εξισώσεις (5.1) και (3.21) πρέπει να λυθούν με τις αρχικές και συνοριακές τους συνθήκες. Για τον λόγο αυτό θέτουμε τα παρακάτω,

$$x_s(t) = Ae^{i\omega t}, \quad (5.5)$$

και

$$p^*(x, t) = p(x)e^{i\omega t}, \quad (5.6)$$

όπου η  $p(x)$  είναι συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου,  $A$  μια σταθερή και  $\omega$  η ιδιοσυχνότητα του συζευγμένου συστήματος.

Η (5.4a) γράφεται με την βοήθεια των (3.8b), (3.8c) και (3.18),

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} \Big|_{x=0} + \frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5.7)$$

ή

$$\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5.8)$$

Η (5.6) μαζί με την (5.8) δίνει,

$$\frac{\partial}{\partial x} (p(x)e^{i\omega x}) = 0 \quad (5.9)$$

ή

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5.10)$$

Η (5.4b) γράφεται με την βοήθεια των (3.7a) και (3.7b) και (3.18),

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} \Big|_{x=L} + \frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.11)$$

Η εξισώσεις (3.7b), (3.8d), (5.5) και (5.6) δίνουν μαζί με την (5.11),

$$\frac{\partial}{\partial x} (p(x)e^{i\omega x}) \Big|_{x=L} = -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{x}_s(L, t)) = 0 \quad (5.12)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial x} (p(x)e^{i\omega x}) \Big|_{x=L} = -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i\omega x}) = 0 \quad (5.13)$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις και τις πράξεις προκύπτει,

$$e^{i\omega x} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\bar{\rho} e^{i\omega x} i^2 \omega^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (5.14)$$

Τελικά μένει,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = \bar{\rho} \omega^2 A \quad (5.15)$$

Οι σχέσεις (5.10) και (5.15) είναι οι συνοριακές συνθήκες στην κατάλληλη μορφή. Από τις (5.19c), (5.5) και (5.6) προκύπτει

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} e^{i\omega t} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} e^{i\omega t} \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = i\omega e^{i\omega t} p(x) \quad (5.18)$$

και

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} p(x) \quad (5.19)$$

Αντικαθιστούμε στην (5.19c) τις (5.17) και (5.18) και προκύπτει

$$p''(x)e^{i\omega t} - \frac{1}{c_s^2}(-\omega^2 e^{i\omega t} p(x)) = 0, \quad (5.20)$$

$$p''(x) + \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 p(x) = 0 \quad (5.21)$$

ή

$$p''(x) + k^2 p(x) = 0, \quad (5.22)$$

όπου,

$$k = \frac{\omega}{c_s} \quad (5.23)$$

Η εξίσωση (5.22) έχει λύση

$$p(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \quad (5.24)$$

ή

$$p(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad (5.25)$$

με συνοριακές συνθήκες τις (5.10) και (5.15). Προκύπτει

$$c_2 = 0 \quad (5.26)$$

και

$$c_1 = -\frac{\rho \omega^2 A}{\bar{k} \sin(\bar{k} \bar{L})} \quad (5.27)$$

Τελικά, η λύση της (5.19c) είναι,

$$p(x) = -\frac{\rho \omega^2 A}{\bar{k} \sin(\bar{k} \bar{L})} \cos(kx), \quad (5.28)$$

Στην σχέση (5.1) αντικαθιστούμε τις (5.2), (5.5) και (5.6), και προκύπτει,

$$-m\omega^2 A e^{i\omega x} + \bar{K} A e^{i\omega x} = p(\bar{L}) e^{i\omega x} \quad (5.29)$$

ή χρησιμοποιώντας την (5.28) για  $x = \bar{L}$ ,

$$-m\omega^2 A e^{i\omega x} + \bar{K} A e^{i\omega x} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{k}_c \tan(\bar{k}_c \bar{L})} A e^{i\omega x} \quad (5.30)$$

ή

$$-m\omega^2 + \bar{K} = -\frac{\bar{\rho} \omega^2}{\bar{k}_c \tan(\bar{k}_c \bar{L})}, \quad (5.31)$$

άρα

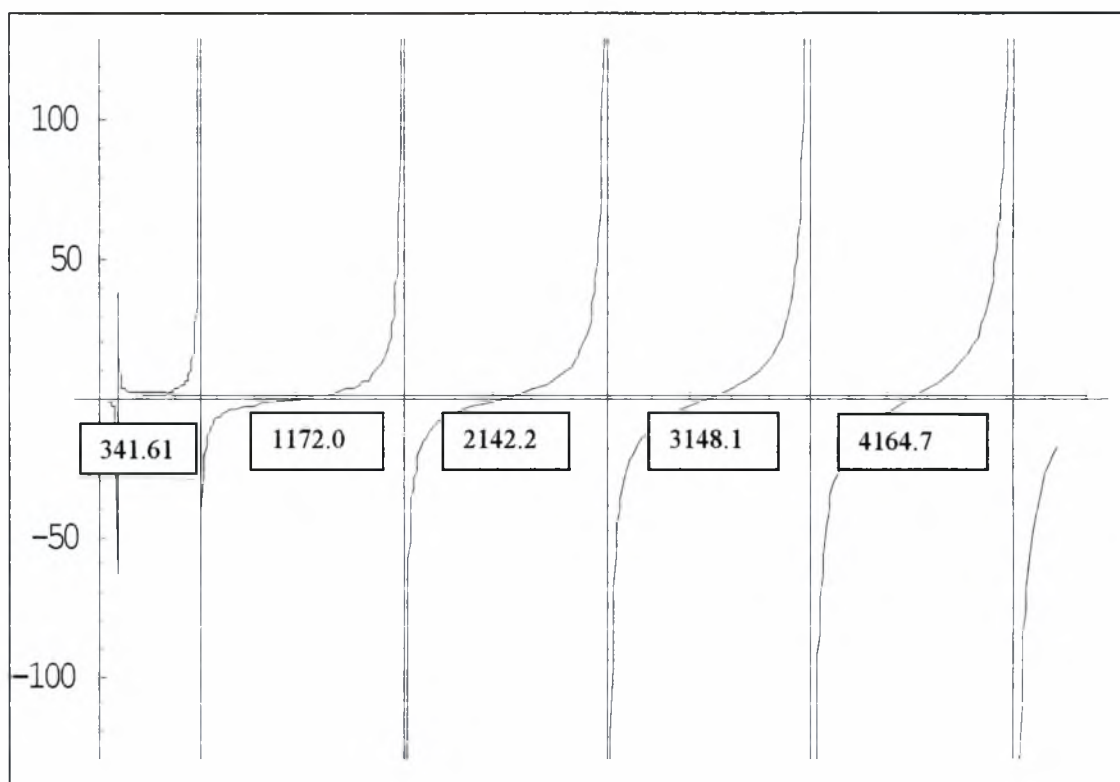
$$\frac{\omega L}{c_s} \tan\left(\frac{\omega L}{c_s}\right) = \frac{\bar{\rho} L}{m(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2})} \quad (5.32)$$

Η μεταβλητή  $\omega$  παίρνει πολλές τιμές, που είναι οι ιδιοτιμές του συζευγμένου συστήματος. Η σημασία της σύζευξης φαίνεται στην μεγάλη αλλαγή που παρουσιάζει σε σχέση με αυτές του ταλαντωτή και του ρευστού.

Λύνουμε την (5.32) και βρίσκουμε,

$$\omega_1 = 341.612 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.33)$$

όπου  $\omega_1$  η πρώτη ιδιοτιμή.



Γράφημα 5.1: Γραφική απεικόνιση πρώτης ιδιοτιμής.

Οι επόμενες τέσσερις ιδιοτιμές είναι οι παρακάτω:

$$\omega_2 = 1172.01$$

$$\omega_3 = 2142.19$$

$$\omega_4 = 3148.05$$

$$\omega_5 = 4165.71$$

Μία γραφική απεικόνιση του αριστερού και δεξιού τμήματος της (5.32) φαίνεται στο γράφημα 5.1.

Στην συνέχεια είναι δυνατό να λυθεί η εξίσωση (5.1) αντικαθιστώντας τον όρο  $f(i)$  ως εξής:

$$f(i) = p(L, i) - p_a = p'(L) e^{i \omega t}. \quad (5.34a)$$

Από την (5.28) προκύπτει ότι,

$$p'(L) = -\frac{\rho \omega^2 A}{K \tan(KL)}. \quad (5.34b)$$

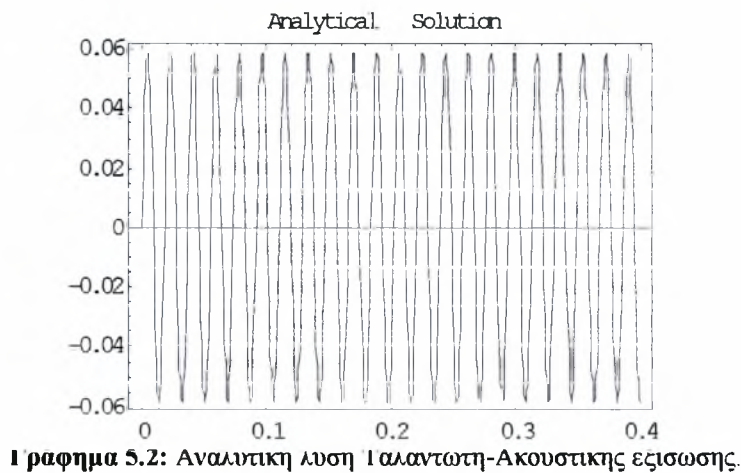
Αντικαθιστώντας, τέλος, την πάνω έκφραση στην (5.34a) και το αποτέλεσμα στην (5.1) βρίσκουμε,

$$m \ddot{x}_s(t) + \left( \frac{\bar{\rho} \omega^2}{k \tan(kL)} + K \right) x_s(t) = 0. \quad (5.35a)$$

Η λύση που προκύπτει είναι,

$$x_s(t) = 0.0584970 \sin(341.612t) \quad (5.35b)$$

που απεικονίζεται στο γράφημα 5.2.



Είναι δυνατό, επίσης, να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες του ρευστού. Για τον υπολογισμό θεωρούμε πως το ρευστό βρίσκεται μόνο του σε αγωγό φραγμένο και στα δύο άκρα του από ακλόνητα τοιχώματα. Υπολογίζουμε την εξίσωση (5.32) για μάζα  $m$  να τείνει στο άπειρο. Άρα,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\bar{\rho} L}{m \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \right)} \right) = \frac{\omega L}{c_s} \tan \left( \frac{\omega L}{c_s} \right). \quad (5.36)$$

Στην (5.19) χρησιμοποιούμε συνοριακές συνθήκες τις (5.10) και (5.15) και προκύπτει,



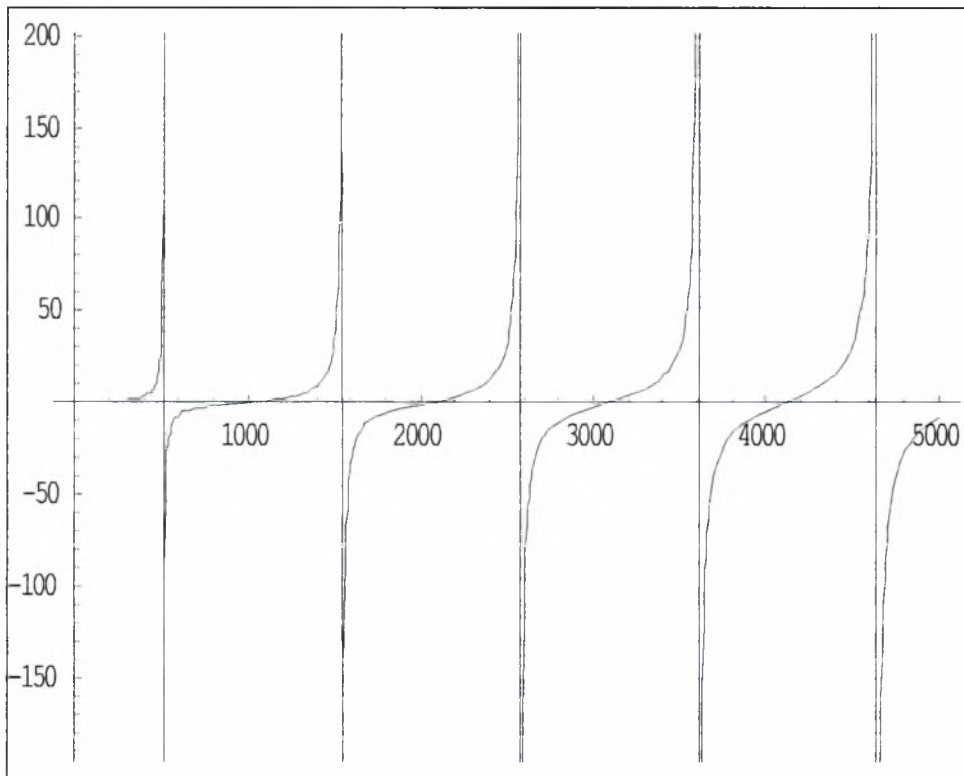
$$0.0030472\omega_1 \tan(0.0030472\omega_1) = 0, \quad (5.37)$$

όπου  $\omega_1$  οι ιδιοσυχνότητες του ρευστού.

Η πρώτη ιδιοσυχνότητα που προκύπτει είναι,

$$\omega_1 = 1030.98 \frac{rad}{sec}. \quad (5.38)$$

Οι πρώτες τέσσερις ιδιοσυχνότητες φαίνονται στο γράφημα 5.3 και είναι,



**Γράφημα 5.3:** Γραφική απεικόνιση ιδιοτιμών.

$$\omega_2 = 2061.95$$

$$\omega_3 = 3092.93,$$

$$\omega_4 = 4123.91$$

Επομένως η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής είναι  $\omega_k = 100 \frac{rad}{sec}$ , η κύρια

ιδιοσυχνότητα του ρευστού είναι  $\omega_r = 1030.98 \frac{rad}{sec}$  ενώ η κύρια ιδιοσυχνότητα του

συζευγμένου προβλήματος αλληλεπίδρασης είναι  $\omega_{\pi} = 341.612 \frac{rad}{sec}$ . Είναι φανερό

ότι το συζευγμένο σύστημα αλλάζει σημαντικά συμπεριφορά σε σχέση με την κατασκευή και το ρευστό. Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα πρέπει να αντιμετωπίζεται συνολικά ενώ στην αντίθετη περίπτωση η ξεχωριστή επίλυση του ρευστού και της κατασκευής οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων και θα προκύψει το συμπέρασμα αυτό.

### 6.1 Αριθμητική μέθοδος επίλυσης ταλαντωτή

Το έμβολο που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.1) και (5.2) που έχει έναν βαθμό ελευθερίας και επιλύθηκε με συνοριακές συνθήκες τις

$$x_s(0) = 0 \quad (6.1)$$

και

$$\dot{x}_s(0) = 20. \quad (6.2)$$

Η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε λέγεται «Μέθοδος επιτάχυνσης σταθερού συντελεστή» ή αλλιώς **Newmark** και ολοκληρώνει στον χρόνο. Είναι κατανοητή ως επέκταση της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης. Προτάθηκε από τον **Bathe** [14] και είναι συνεπείς και ευσταθείς για κάθε μέγεθος βήματος στον χρόνο χωρίς να παρουσιάζει αριθμητική μείωση του συντελεστή ενίσχυσης  $|G|$ .

Η σχέσεις που περιγράφουν το αριθμητικό σχήμα είναι οι,

$$U^{n+1} = U^n + \dot{U}^n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}^n + \alpha \ddot{U}^{n+1} \right] \Delta t^2 \quad (6.3)$$

και

$$\dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + [(1 - \delta) \ddot{U}^n + \delta \ddot{U}^{n+1}] \Delta t, \quad (6.4)$$

όπου  $U$  είναι η μετατόπιση του ταλαντωτή και  $\alpha$  και  $\delta$  δύο παράμετροι που επιλέγονται με κριτήριο την ακρίβεια και την ευστάθεια. Για τον αλγόριθμο του Newmark επιλέγονται  $\alpha = \frac{1}{4}$  και  $\delta = \frac{1}{2}$ . Η δεύτερη παράγωγος  $\ddot{U}$  αντικαθίσταται τις χρονικές στιγμές  $n$  και  $n+1$  από την σχέση,

$$m\ddot{U} + KU = f \quad (6.5)$$

και μετά από κατάλληλη αλγεβρική επεξεργασία το αριθμητικό σχήμα Newmark γράφεται υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t} + K & 0 \\ -\frac{2}{\Delta t} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^{n+1} \\ \dot{x}_s^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t^2} - K & \frac{4m}{\Delta t} \\ -\frac{2}{\Delta t} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^n \\ \dot{x}_s^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f^{n+1} + f^n \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.6)$$

Οι άγνωστοι είναι η μετατόπιση  $x_s^{n+1}$  και η ταχύτητα  $\dot{x}_s^{n+1}$ , αφού ο άγνωστος όρος της επιτάχυνσης  $\ddot{x}_s^{n+1}$  έχει απλοποιηθεί.

Για τον υπολογισμό της εξωτερικής δύναμης που δρα πάνω στο ελατήριο και προέρχεται τις υδροδυναμικές πιέσεις ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία. Από τον ορισμό της ισεντροπικής ταχύτητας του ήχου, σχέση (3.10), προκύπτει

$$c_s^2 = \frac{dp_a}{d\bar{\rho}} = \gamma R T_0 = \gamma \frac{p_a}{\bar{\rho}} \quad (6.7)$$

όπου  $\bar{\rho}$  η μέση τιμή της πυκνότητας. Επίσης, για την αδιαβατική μεταβολή ισχύει,

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_a}{\bar{\rho}^\gamma} \quad (6.8)$$

και με την βοήθεια της (6.7) γράφεται,

$$P = \frac{\rho^\gamma}{\bar{\rho}^\gamma} P_a = \frac{\rho^\gamma}{\bar{\rho}^\gamma} \frac{c_s^2 \bar{\rho}}{\gamma} = c_s^2 \frac{\bar{\rho}}{\gamma} \left( \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^\gamma \quad (6.9)$$

Η σχέση που δίνει την εξωτερική διέγερση του ταλαντωτή στο σχήμα 6.6 είναι,

$$f^{n+1} + f^n = (p^{n+1} - p_a) + (p^n - p_a). \quad (6.10)$$

Άρα από τις σχέσεις (6.9) και (6.10) προκύπτει,

$$\begin{aligned} f^{n+1} + f^n &= c_s^2 \frac{\bar{\rho}}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho^{n+1}}{\bar{\rho}} \right)^\gamma + \left( \frac{\rho^n}{\bar{\rho}} \right)^\gamma \right] - 2p_a = \\ &= \frac{c_s^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho^{n+1}}{\bar{\rho}} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{\rho^n}{\bar{\rho}} \right)^{\gamma-1} \right] - 2p_a \end{aligned} \quad (6.11)$$

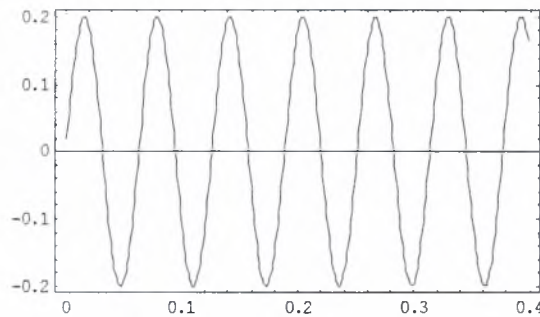
που γραμμικοποιείται στην μορφή,

$$f^{n+1} + f^n = \frac{c_s^2}{\gamma} [\rho^{n+1} + \rho^n] - 2p_a \quad (6.12)$$

με ένα μικρό σφάλμα, της τάξης του  $\pm 1\%$ . Το σύστημα παίρνει την τελική μορφή,

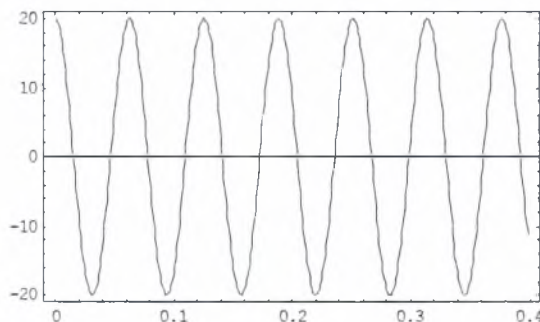
$$\begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t^2} + K & 0 \\ -\frac{2}{\Delta t} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^{n+1} \\ \dot{x}_s^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t^2} - K & \frac{4m}{\Delta t} \\ -\frac{2}{\Delta t} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^n \\ \dot{x}_s^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{c_s^2}{\gamma} [\rho^{n+1} + \rho^n] - 2p_c \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.12)$$

Τα αποτελέσματα της εξίσωσης (6.12) για  $\rho = \bar{\rho} = 1.3$  με αρχικές συνθήκες  $u_s = 0$  και  $\dot{u}_s = 20$  αντιστοιχούν στη λύση της ομογενούς εξίσωσης του ταλαντωτή. Το γράφημα 6.1 δείχνει την μετατόπιση του εμβόλου, σε μέτρα ως προς τον χρόνο.



**Γράφημα 6.1:** Μετατόπιση του εμβόλου.

Το γράφημα 6.2 δείχνει την ταχύτητά του, σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο ως προς τον χρόνο.



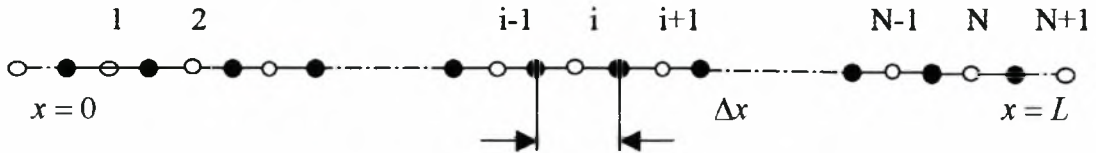
**Γράφημα 6.2:** Ταχύτητα του εμβόλου.

Τα αποτελέσματα αυτά αντιστοιχούν στην περίπτωση όπου το ελατήριο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση, με ιδιοσυχνότητα  $\omega = 100 \frac{rad}{sec}$ , δηλαδή χωρίς την ύπαρξη εξωτερικής δύναμης.

## 6.2 Αριθμητική μέθοδος επίλυσης πεδίου ροής

Οι ακουστικές εξισώσεις, οι οποίες είναι οι σχέσεις (3.13) και (3.18) και περιγράφουν την ροή, είναι δυνατό να λυθούν με τις μεθόδους που περιγράφονται στο κεφάλαιο 4. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδιες με την περίπτωση της αναλυτικής επίλυσης, στο προηγούμενο κεφάλαιο, και είναι η εξίσωση (3.22).

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων στις ακουστικές εξισώσεις του ρευστού προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων με διάσταση ίση με τον αριθμό των διαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το συνολικό μήκος. Στο μέσο κάθε διαστήματος ορίζουμε τους κόμβους όπου προσεγγίζονται οι ακουστικές εξισώσεις.



Σχήμα 6.3: Διακριτοποίηση πεδίου λύσης ρευστού.

Η εφαρμογή των εξισώσεων γίνεται στο **μέσο** του κάθε διαστήματος όπου βρίσκονται οι όπως δείχνει το σχήμα 6.3 και οι συνοριακές συνθήκες εισάγονται μέσω των δύο φανταστικών κόμβων  $i = 0$  και  $i = N + 1$ . Ο πρώτος είναι το αριστερό σταθερό άκρο και δεύτερος ο ταλαντωτής. Διακριτοποιώντας την εξίσωση (3.21) με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και επιλέγοντας ένα πεπλεγμένο σχήμα προκύπτει,

$$\frac{\underline{U}_i^{n+1} - \underline{U}_i^n}{\Delta t} + c \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Phi_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} = 0. \quad (6.14)$$

όπου  $\underline{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \bar{\rho}u' \end{Bmatrix}$ . Το διάνυσμα  $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$  υπολογίζεται από την έκφραση [7],

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \underline{\underline{A}}^+ \underline{U}_i^{n+1} + \underline{\underline{A}}^- \underline{U}_{i+1}^{n+1}, \quad (6.15)$$

όπου οι πίνακες  $\underline{\underline{A}}^+$  και  $\underline{\underline{A}}^-$  είναι θετικά και αρνητικά ορισμένοι, αντίστοιχα, προκύπτουν από τον πίνακα  $\underline{\underline{A}}$  και είναι οι,

$$\underline{\underline{A}}^+ = \begin{bmatrix} c_s & 1 \\ c_s^2 & c_s \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{A}}^- = \begin{bmatrix} -c_s & 1 \\ c_s^2 & -c_s \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Οι εξισώσεις του ρευστού προσεγγίζονται από την σχέση,

$$\underline{U}_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\underline{\underline{A}}^+ \underline{U}_i^{n+1} + \underline{\underline{A}}^- \underline{U}_{i+1}^{n+1} - \underline{\underline{A}}^+ \underline{U}_{i-1}^{n+1} - \underline{\underline{A}}^- \underline{U}_i^{n+1}) = \underline{U}_i^n. \quad (6.17)$$

Η παραπάνω εξίσωση όταν εφαρμοστεί στους κόμβους 1 και  $N$  εισάγει τις αντίστοιχες ποσότητες τους φανταστικούς κόμβους  $i = 0$  και  $i = N + 1$ . Τα μεγέθη  $\underline{U}_0^{n+1}$  και  $\underline{U}_{N+1}^{n+1}$  υπολογίζονται με προεμβολή. Προκύπτει ότι,

$$\underline{U}_0^{n+1} = \begin{Bmatrix} 2U(1)_1^{n+1} - U(1)_2^{n+1} \\ U(2)_2^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

και

$$\underline{U}_{N+1}^{n+1} = \begin{Bmatrix} 2U(1)_N^{n+1} - U(1)_{N+1}^{n+1} \\ 2\rho V^e - U(2)_{N-1}^{n+1} \end{Bmatrix}. \quad (6.19)$$

Στις εκφράσεις (6.18) και (6.19) έχουν χρησιμοποιηθεί οι οριακές συνθήκες  $U(2)_1 = 0$  και  $U(2)_N = 2\rho V^e$ . Η ταχύτητα  $V^e$  είναι η ταχύτητα του εμβόλου που στη φάση αυτή θεωρείται γνωστή. Στην συνέχεια θα εκτιμηθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (6.18) και (6.19) στην εξίσωση (6.17) για  $i = 1$  και  $i = N$ , αντίστοιχα, προκύπτουν οι εξισώσεις διαφορών,

$$\underline{U}_1^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\underline{A}^+ \underline{U}_1^{n+1} + \underline{A}^- \underline{U}_2^{n+1} - \underline{A}^+ \underline{U}_0^{n+1} - \underline{A}^- \underline{U}_1^{n+1}) = \underline{U}_1^n \quad (6.20)$$

και

$$\underline{U}_N^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\underline{A}^+ \underline{U}_N^{n+1} + \underline{A}^- \underline{U}_{N+1}^{n+1} - \underline{A}^+ \underline{U}_{N-1}^{n+1} - \underline{A}^- \underline{U}_N^{n+1}) = \underline{U}_N^n \quad (6.21)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (6.17) για τους εσωτερικούς κόμβους  $i = 1, \dots, N - 1$  και (6.20) και (6.21) για τους συνοριακούς κόμβους είναι block τριδιαγώνιο και μπορεί να επιλυθεί με τον αλγόριθμο block Tomas. Η μορφή του συστήματος φαίνεται καλύτερα στο Παράρτημα 1.

### 6.3 Σύζευξη λύσεων μέσω οριακών συνθηκών

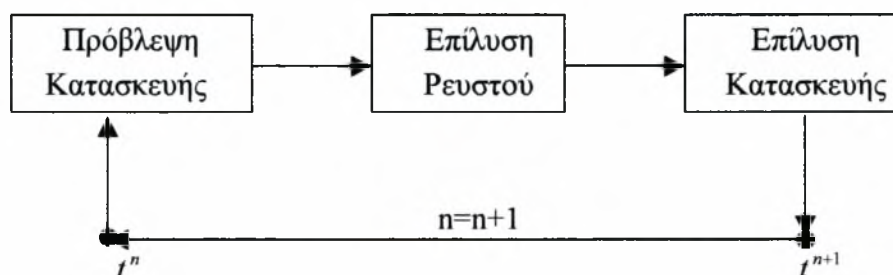
Ενώ το κάθε ένα από τα αριθμητικά σχήματα είναι πεπλεγμένο στον χρόνο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος και η χρονική κλίμακα της σύζευξης των δύο λύσεων. Στην συνέχεια περιγράφονται οι κατηγορίες σύζευξης των αριθμητικών σχημάτων. Η πρώτη είναι η μετατοπισμένη στον χρόνο και η δεύτερη είναι η πλήρως πεπλεγμένη. Η μετατοπισμένη σύζευξη στον χρόνο είναι δύο βημάτων γι' αυτό και εισάγει επιπλέον ένα σφάλμα σε αντίθεση με την πλήρως πεπλεγμένη που είναι ενός βήματος. Για τον λόγο αυτό, όπως θα φανεί αναλυτικότερα παρακάτω, στο μετατοπισμένο σχήμα γίνονται δύο διαφορετικές εκτιμήσεις της ταχύτητας του εμβόλου, με διαφορετικό μέγεθος σφάλματος η κάθε μία.



Η σύζευξη των δύο προβλημάτων γίνεται μέσω των κοινών οριακών συνθηκών. Επειδή δεν εφαρμόζεται χρονικά μετατοπιζόμενο πλέγμα βασική προϋπόθεση είναι οι διαταραχές να είναι μικρές, κάτι που αποτελεί βασική παραδοχή της ακουστικής θεωρίας. Η πληροφορία που μεταφέρει στο ρευστό ο ταλαντωτής είναι η ταχύτητα του, ενώ η πληροφορία που μεταφέρει το ρευστό στον ταλαντωτή είναι οι υδροδυναμικές πιέσεις.

### 6.3.1 Σύζευξη με διαφορά φάσης

Το μετατοπισμένο σχήμα στον χρόνο είναι το πιο συνηθισμένο στην επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστού στερεού στον χρόνο. Χρησιμοποιεί δύο χωριστούς αλγορίθμους επίλυσης για το ρευστό και της κατασκευής. Η σύνδεση των δύο αλγορίθμων πραγματοποιείται με την ανταλλαγή πληροφοριών που αφορούν στις συνοριακές συνθήκες. Εκεί οφείλεται και το σφάλμα που εισάγει η μέθοδος. Όσο μικραίνει το χρονικό βήμα, μικραίνει και το σφάλμα. Εδώ χρησιμοποιούνται δύο προβλέψεις και το σχήμα λειτουργεί σχηματικά όπως φαίνεται στο σχήμα 6.4 . Την χρονική στιγμή  $t = t^n$ , όπου η κατάσταση του ρευστού και του ταλαντωτή είναι γνωστές ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα ώστε να μεταβούμε στην χρονική στιγμή  $t = t^{n+1}$ .



Σχήμα 6.4: Μετατοπισμένος αλγόριθμος σύζευξης

1. Πρόβλεψη της ταχύτητας της κατασκευής για την χρονική στιγμή  $t = t^{n+1}$ .
2. Επίλυση των εξισώσεων του ρευστού με ταχύτητα που προβλέφθηκε.
3. Επίλυση της κατασκευής με συνοριακή συνθήκη που προκύπτει από την πίεση του ρευστού.

Στην παραπάνω διαδικασία στο βήμα 1 χρησιμοποιούνται δύο προβλέψεις για την ταχύτητα του εμβόλου.

Η πρόβλεψη 1 δίνεται από την σχέση



$$\{\dot{x}_s^{n+1}\} = \{\dot{x}_s^n\} \quad (6.22)$$

και η πρόβλεψη 2 δίνεται από την σχέση

$$\{\dot{x}_s^{n+1}\} = \{\dot{x}_s^n\} + \Delta t \{\ddot{x}_s^n\}. \quad (6.23)$$

Το κρίσιμο σημείο της μεθόδου είναι η πρόβλεψη της ταχύτητας του ταλαντωτή στο βήμα 1. Η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή του εμβόλου πρέπει να αντιστοιχεί στην μετατόπιση του, που αντιστοιχεί στην ταχύτητα αυτή, στο ίδιο βήμα. Η ταχύτητα αυτή είναι γραμμική στον χρόνο για την μέθοδο επιτάχυνσης σταθερού συντελεστή. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται ο κανόνας του τραπεζίου για την ολοκλήρωση της ταχύτητας,

$$V^o = \frac{1}{2}(\dot{x}_s^{n+1} + \dot{x}_s^n). \quad (6.24)$$

όπου  $V^o$  η ταχύτητα στο σύνορο ρευστού στερεού. Στην πρόβλεψη 1 το σχήμα έχει σημαντική υστέρηση φάσης αφού βασίζεται αποκλειστικά σε πληροφορίες της προηγούμενης χρονικής στιγμής.

Αντίθετα η κατάσταση βελτιώνεται στην πρόβλεψη 2. Στην περίπτωση αυτή, για να υπολογιστεί ο όρος  $\ddot{x}_s^n$  στην εξίσωση (6.23), χρησιμοποιείται η σχέση

$$\ddot{x}_s^n = -\frac{K}{m}x_s^n + \frac{1}{m}f^n. \text{ Η τελική μορφή της (6.24) είναι,}$$

$$V^o = \frac{1}{2} \left( 2\dot{x}_s^n + \Delta t \left( -\frac{K}{m}x_s^n + \frac{f^n}{m} \right) \right) \quad (6.25)$$

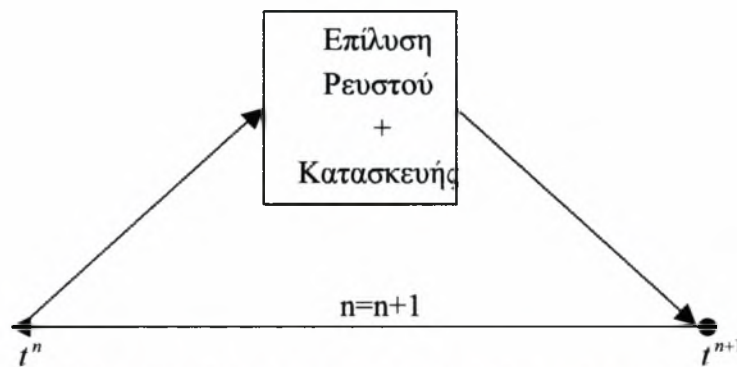
και χρησιμοποιείται αυτούσια στην εξίσωση (6.19).

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μία καλύτερη προσέγγιση για τον όρο  $\dot{x}_s^{n+1}$  και αναμένονται βελτιωμένα αποτελέσματα. Οι αλγεβρικές πράξεις είναι πολύπλοκες και για τον λόγο αυτό στο παράρτημα 1 παρατίθενται οι πίνακες των δύο αλγορίθμων για  $N = 5$  και  $\Delta x = 0.2$ . Προκύπτουν λοιπόν συστήματα 12 εξισώσεων. Στον πίνακα 1 παρουσιάζεται η πρόβλεψη 1, ενώ στον πίνακα 2 η πρόβλεψη 2.

### 6.3.2 Πλήρως πεπλεγμένη

Η επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστού-κατασκευής εμπλέκει χρονικά εξαρτώμενη μεταφορά πληροφορίας από το ρευστό στο στερεό. Η ανταλλαγή συμβαίνει μόνο στο κοινό σύνορο των δύο συστημάτων. Εάν η πρόβλεψη της κατασκευής ήταν ακριβής, τότε οι μετατοπισμένοι αλγόριθμοι θα έδιναν ακριβή αποτελέσματα και δεν θα υπήρχε απώλεια ενέργειας. Στο πλήρως πεπλεγμένο σχήμα η πρόβλεψη είναι ακριβής και η διαφορά απριόρι μηδενική.

Το σχήμα 6.5 παρουσιάζει το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα. Δεν υπάρχει χρονική υστέρηση και η μεταφορά πληροφορίας μεταξύ ρευστού και στερεού περικλείεται σε ένα σύστημα.



Σχήμα 6.5: Πλήρως πεπλεγμένος αλγόριθμος σύζευξης

Η πλήρης σύζευξη βασίζεται στην έκφραση (6.24) όπου τώρα η ταχύτητα  $x_s^{n+1}$  υπολογίζεται ταυτόχρονα με όλους τους άλλους αγνώστους.

Αντίστοιχα, αντικαθιστώντας την (6.19) στην (6.17) προκύπτει η εξίσωση για τον κόμβο  $N$ ,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \underline{A}^- \begin{Bmatrix} 2u(1)_N^{n+1} - u(1)_{N-1}^{n+1} \\ -u(2)_{N-1}^{n+1} \end{Bmatrix} + \underline{A}^- \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \dot{x}_s^{n+1} \end{Bmatrix} \right) + \underline{U}_N^{n+1} +$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \underline{A}^+ \underline{U}_N^{n+1} - \underline{A}^+ \underline{U}_{N-1}^{n+1} - \underline{A}^- \underline{U}_N^{n+1} \right) = \underline{U}_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \underline{A}^- \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \dot{x}_s^n \end{Bmatrix}. \quad (6.26)$$

Αντίστοιχα, ο ταλαντωτής περιγράφεται από την σχέση,

$$\begin{bmatrix} \frac{c_s^2}{\gamma} & 0 \\ \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(1)_N^{n+1} \\ U(2)_N^{n+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t^2} + K & 0 \\ -\frac{2}{\Delta t} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^{n+1} \\ \dot{x}_s^{n+1} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4m}{\Delta t^2} - K & \frac{4m}{\Delta t} \\ -\frac{2}{\Delta t} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s^n \\ \dot{x}_s^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_s^2}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U(1)_N^{n+1} \\ U(2)_N^{n+1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2p_a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

πίνακας 3 του παραρτήματος παρουσιάζει το σύστημα του πλήρως πεπλεγμένου σχήματος για  $N = 5$ . Συγκρίνοντας τους πίνακες 1, 2 και 3 φαίνονται οι διαφορές στη δομή των τριών αριθμητικών σχημάτων.

## 6.4 Αποτελέσματα

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση σύνθετων προβλημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Επομένως υπάρχει πολύ ενδιαφέρον στην ανάπτυξη αριθμητικών σχημάτων που να είναι ευσταθή σε πολύ μεγάλα  $CFL$ . Επίσης είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τον αριθμό  $CFL$  πέρα από τον οποίο παρατηρούμε αστάθεια.

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου με χρονική υστέρηση παρουσιάζονται στα διαγράμματα 6.3 και 6.4. Ένα προφανές είναι πως το σχήμα είναι αριθμητικά ασταθές αφού το εύρος αυξάνει με τον χρόνο. Η αστάθεια χειροτερεύει καθώς το  $CFL$  αυξάνει, ώσπου τελικά, για  $CFL > 14$  δεν εκτελείται ο αλγόριθμος. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα διαγράμματα 6.5 έως 6.8 για το σχήμα με χρονική υστέρηση για τέσσερις αριθμούς  $CFL = 1$ ,  $CFL = 10$ ,  $CFL = 30$  και  $CFL = 50$  είναι ευσταθές για  $CFL \leq 117$ , αριθμός σημαντικά μεγαλύτερος της πρώτης πρόβλεψης. Το σχήμα τούτο παρουσιάζει μεγάλη απόσβεση σε σχέση με το πρώτο. Τέλος, στα διαγράμματα 6.9 έως 6.12, το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα συγκλίνει για κάθε  $CFL$  και παρουσιάζει απόσβεση παρόμοια με του σχήματος με χρονική υστέρηση και πρόβλεψη 2. Για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται, για  $N = 100$  κόμβοι, επτά διαγράμματα που περιγράφουν τα εξής μεγέθη:

Μετατόπιση ταλαντωτή  $x_s$ ,

Ταχύτητα ταλαντωτή  $\dot{x}_s$ ,

Πυκνότητα  $\rho$  ρευστού στον κόμβο 1,

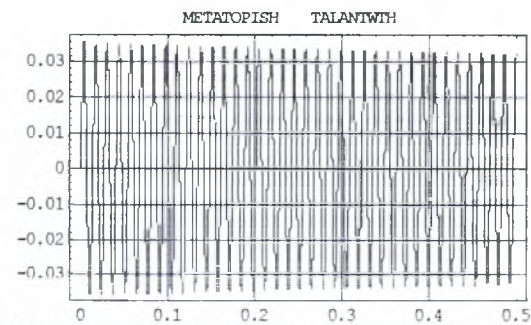
Πυκνότητα  $\rho$  ρευστού στον κόμβο  $N$ ,

Ταχύτητα  $u_s$  ρευστού στον κόμβο 1,

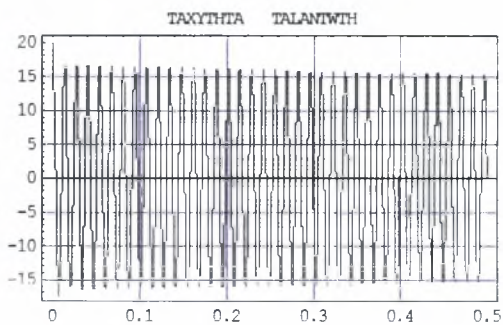
Ταχύτητα  $u_s$  ρευστού στον κόμβο  $N$  και η

Εξωτερική διέγερση του ταλαντωτή  $f^{n+1} + f^n$ .

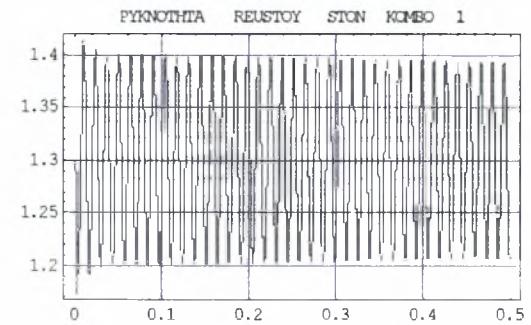
Αποτελέσματα αλγορίθμου με χρονική υστέρηση με πρόβλεψη 1 και  $CFL = 1$



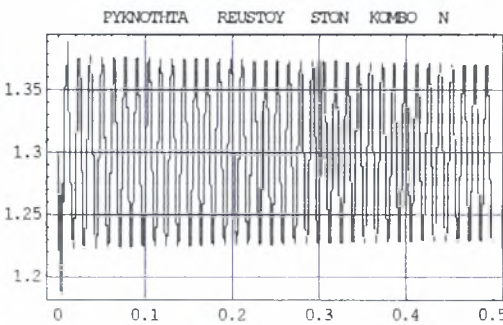
Διάγραμμα 6.3a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



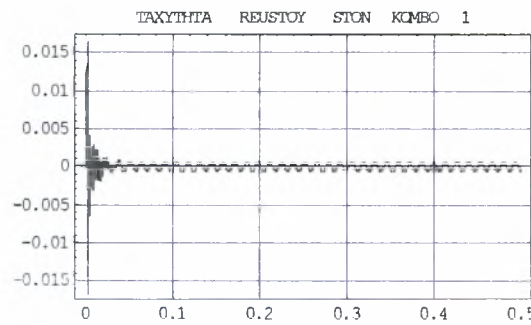
Διάγραμμα 6.3b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



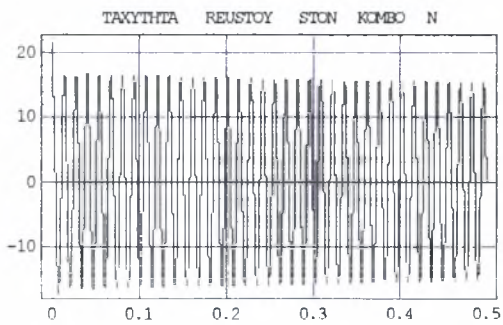
Διάγραμμα 6.3c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



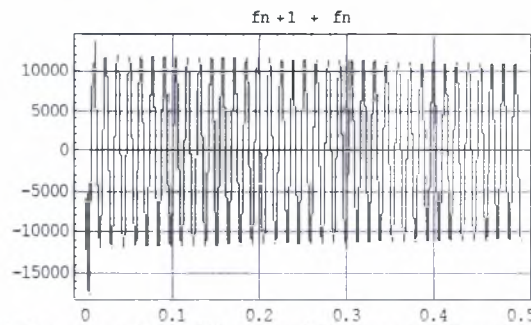
Διάγραμμα 6.3d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.3e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.



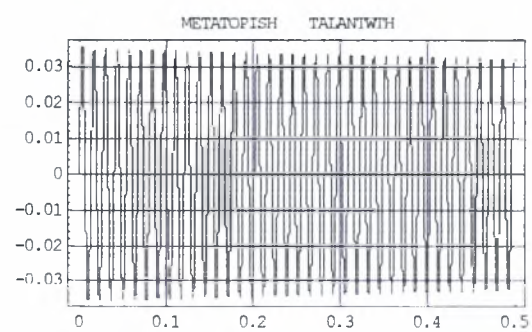
Διάγραμμα 6.3f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



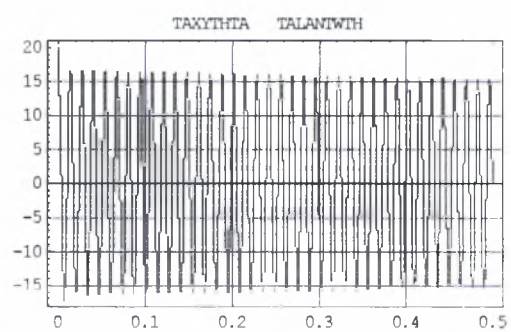
Διάγραμμα 6.3g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.



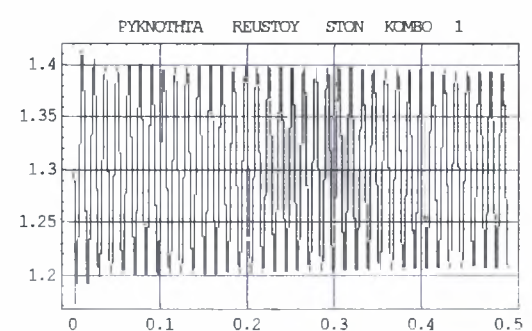
$CFL = 10$



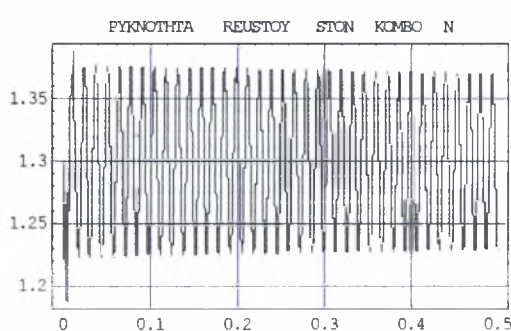
Διάγραμμα 6.4a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



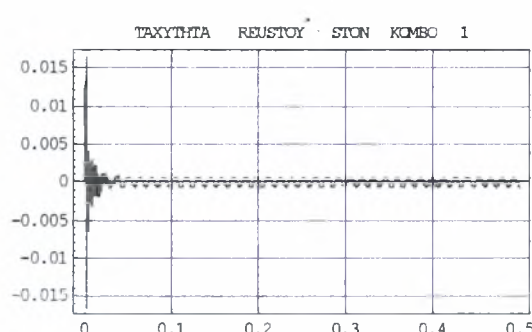
Διάγραμμα 6.4b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



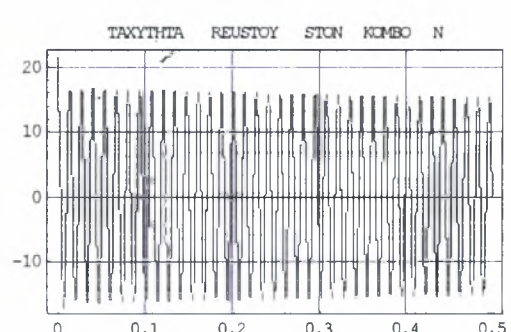
Διάγραμμα 6.4c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



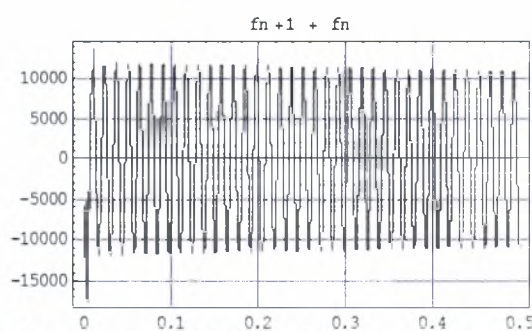
Διάγραμμα 6.4d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.4e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.

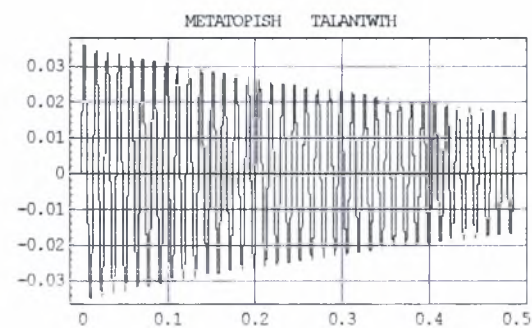


Διάγραμμα 6.4f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .

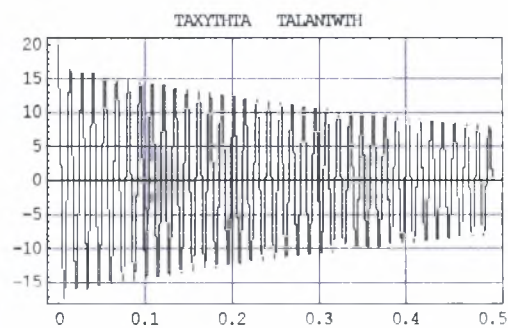


Διάγραμμα 6.4g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

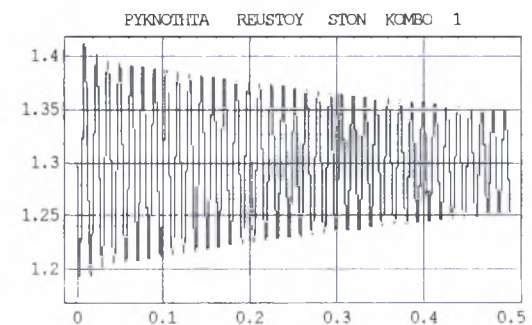
Αποτελέσματα αλγορίθμου με χρονική υστέρηση με πρόβλεψη 2 και  $CFL = 1$



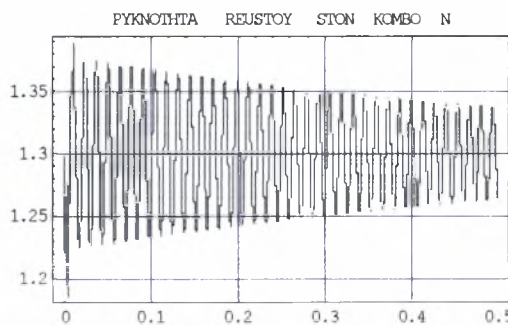
Διάγραμμα 6.5a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



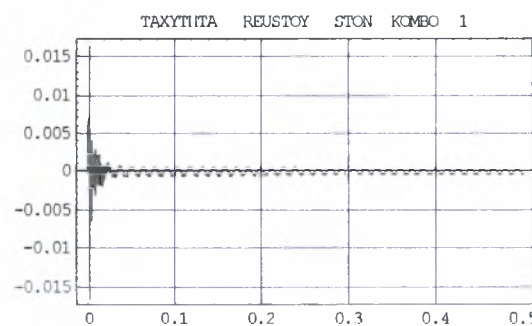
Διάγραμμα 6.5b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



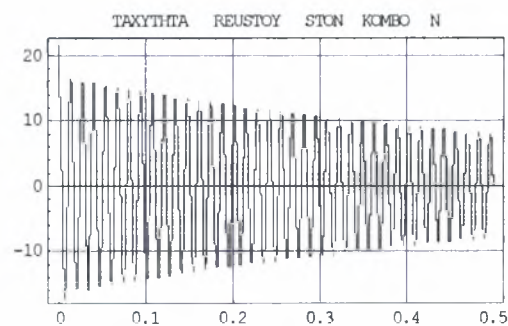
Διάγραμμα 6.5c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



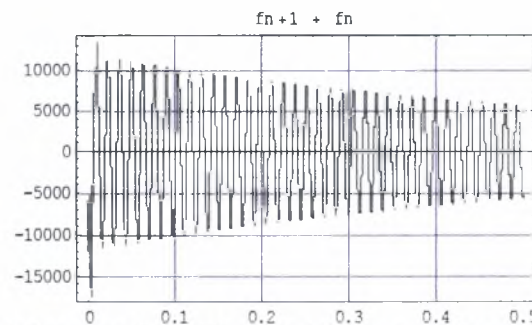
Διάγραμμα 6.5d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.5e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.

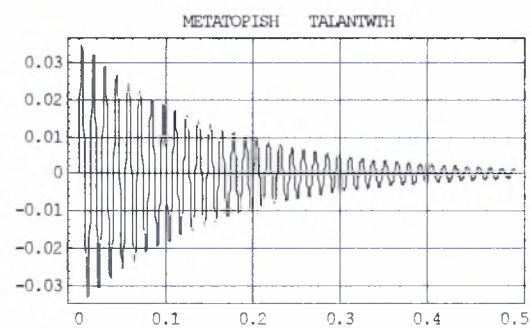


Διάγραμμα 6.5f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .

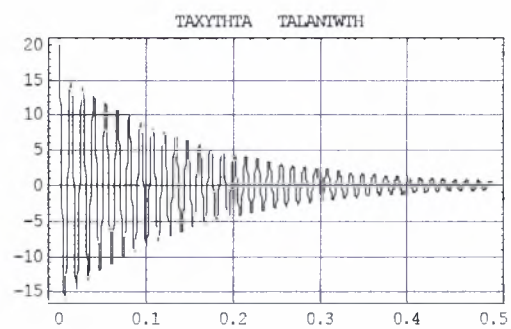


Διάγραμμα 6.5g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

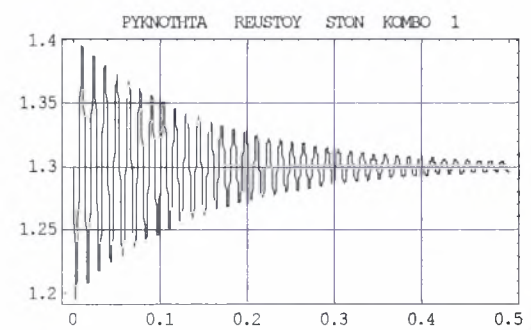
$CFL = 10$



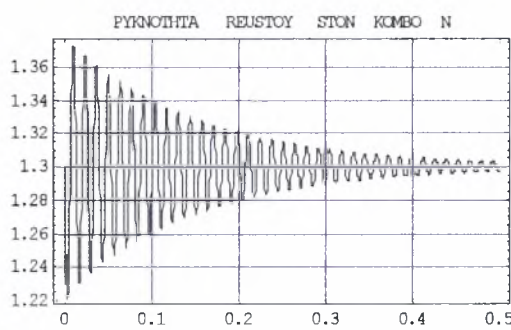
Διάγραμμα 6.6a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



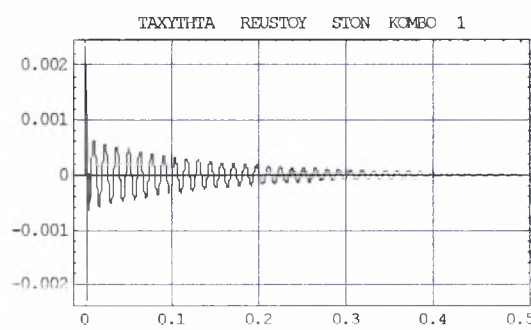
Διάγραμμα 6.6b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



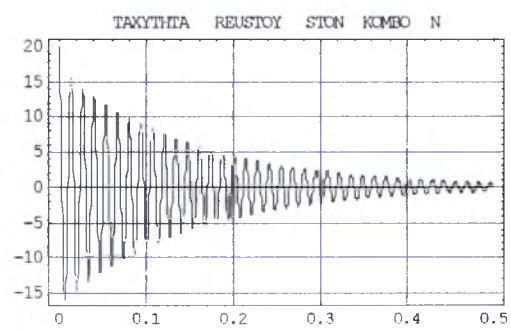
Διάγραμμα 6.6c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



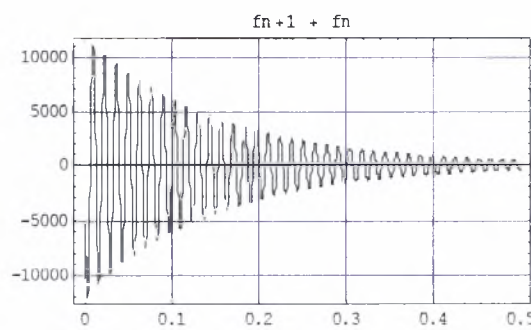
Διάγραμμα 6.6d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.6e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.

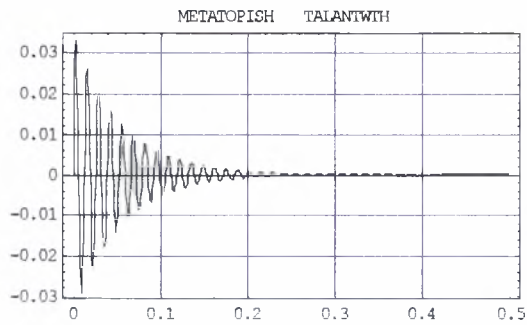


Διάγραμμα 6.6f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .

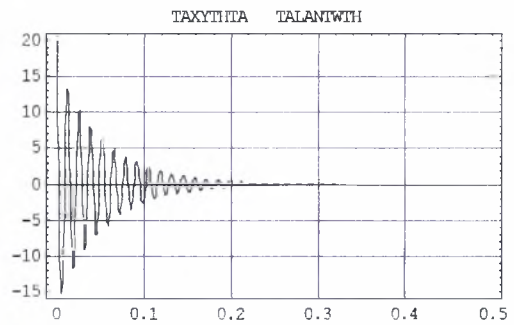


Διάγραμμα 6.6g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

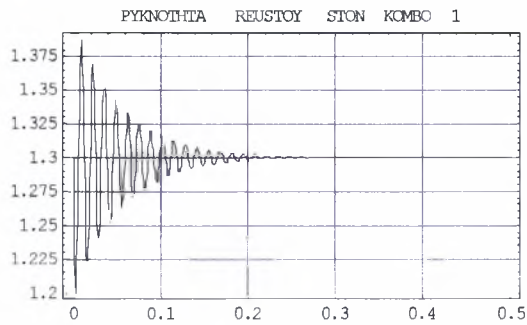
**$CFL = 30$**



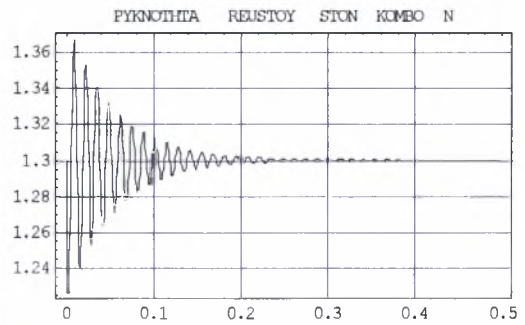
**Διάγραμμα 6.7a:** Μετατόπιση ταλαντωτή.



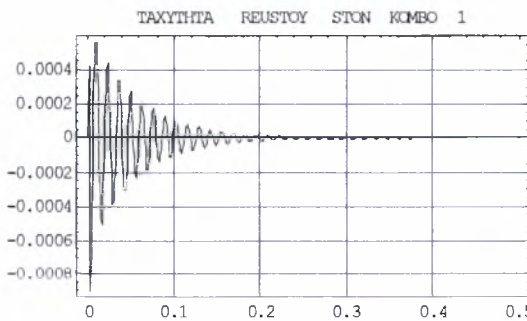
**Διάγραμμα 6.7b:** Ταχύτητα ταλαντωτή.



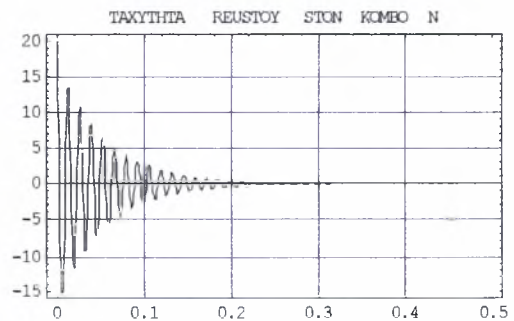
**Διάγραμμα 6.7c:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



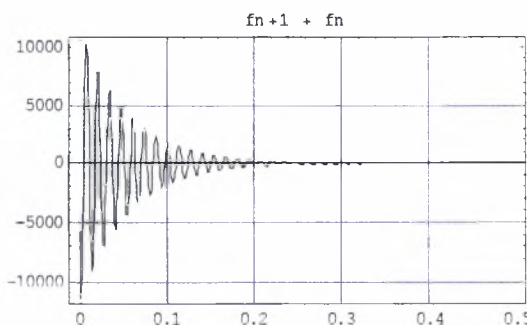
**Διάγραμμα 6.7d:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



**Διάγραμμα 6.7e:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.



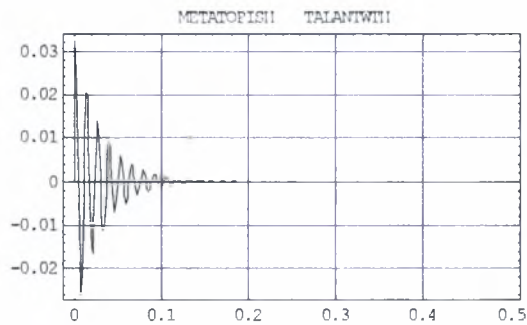
**Διάγραμμα 6.7f:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



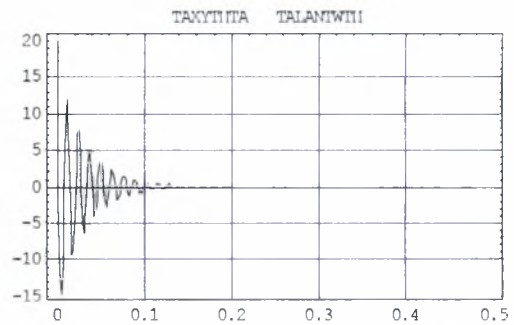
**Διάγραμμα 6.7g:** Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.



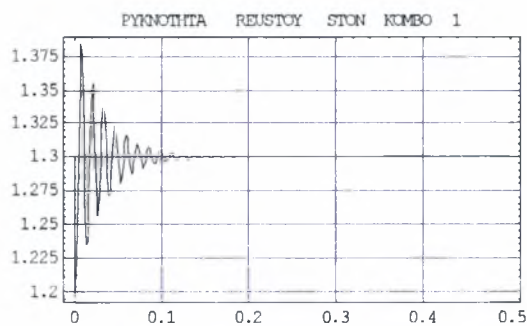
**CFL = 50**



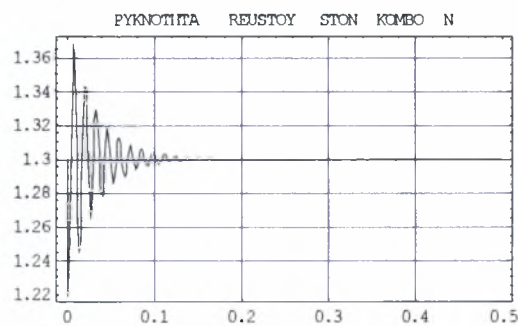
**Διάγραμμα 6.8a:** Μετατόπιση ταλαντωτή.



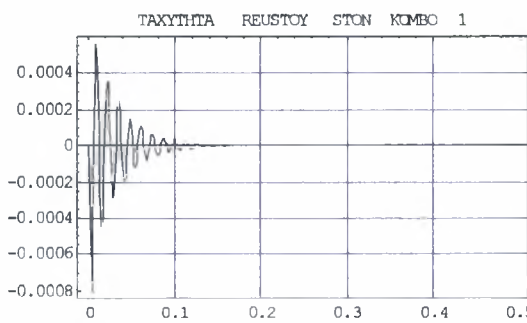
**Διάγραμμα 6.8b:** Ταχύτητα ταλαντωτή.



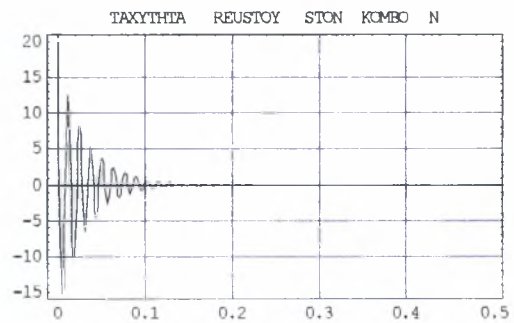
**Διάγραμμα 6.8c:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



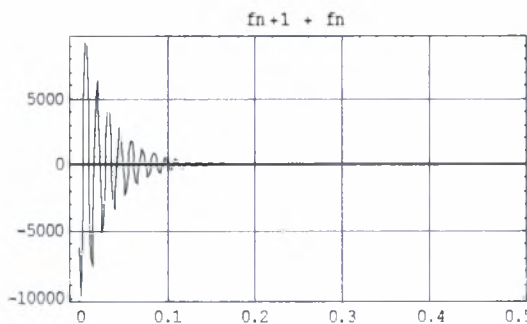
**Διάγραμμα 6.8d:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



**Διάγραμμα 6.8e:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.



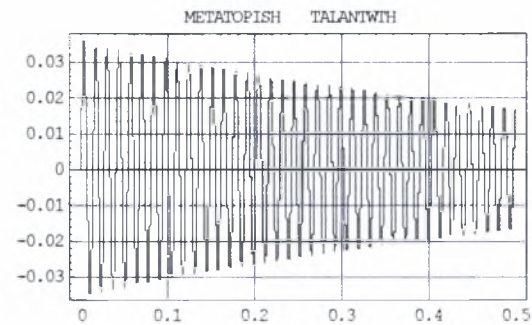
**Διάγραμμα 6.8f:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



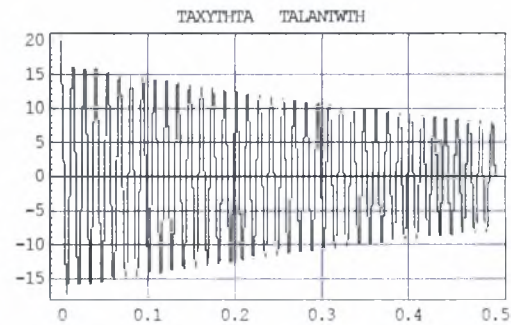
**Διάγραμμα 6.8g:** Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

Αποτελέσματα πλήρως πεπλεγμένου αλγορίθμου

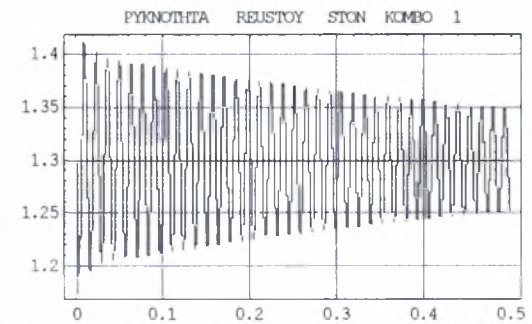
Αποτελέσματα πλήρως πεπλεγμένου αλγορίθμου για  $CFL = 1$



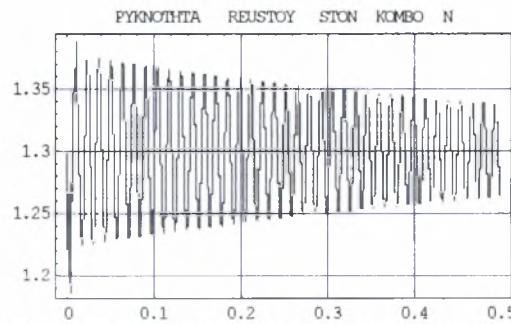
Διάγραμμα 6.9a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



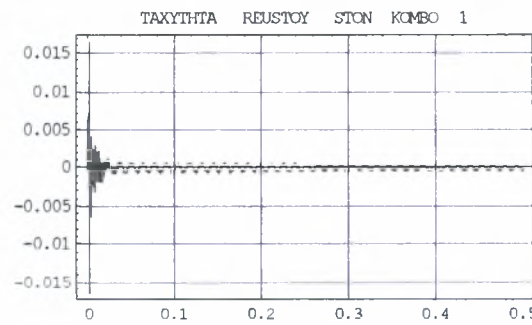
Διάγραμμα 6.9b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



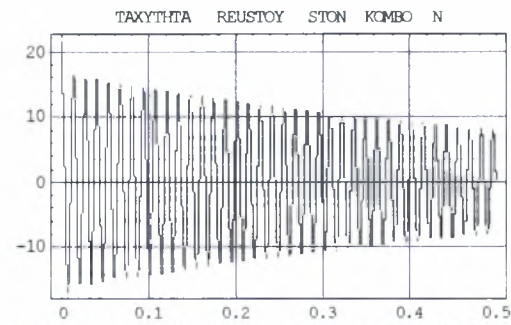
Διάγραμμα 6.9c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



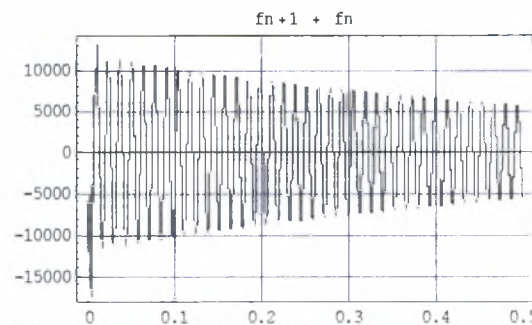
Διάγραμμα 6.9d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.9e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.

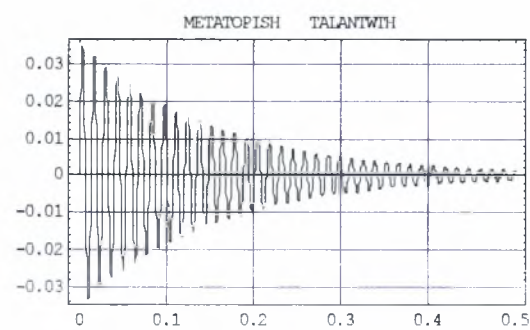


Διάγραμμα 6.9f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .

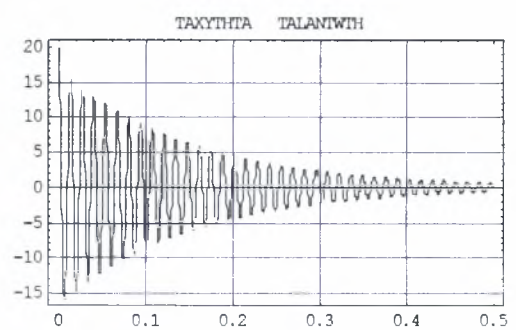


Διάγραμμα 6.9g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

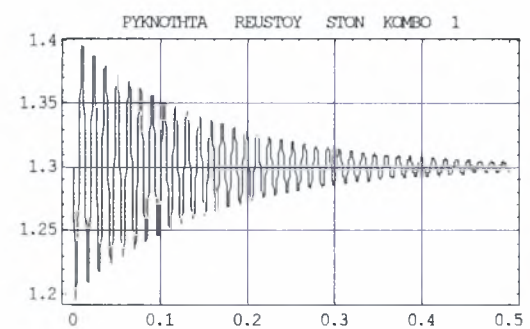
$CFL = 10$



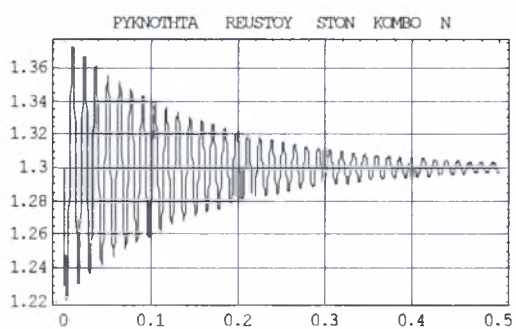
Διάγραμμα 6.10a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



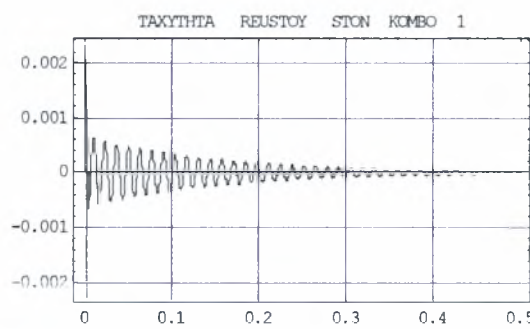
Διάγραμμα 6.10b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



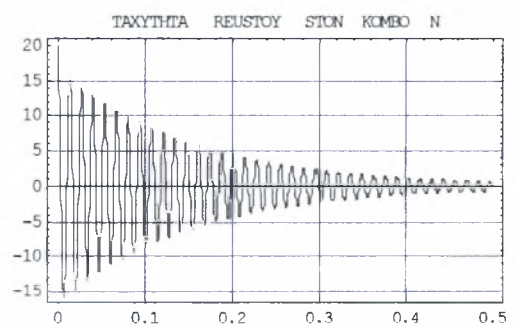
Διάγραμμα 6.10c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



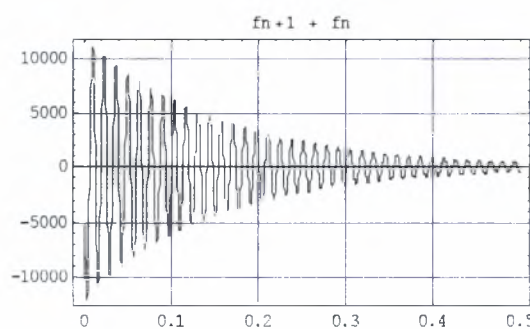
Διάγραμμα 6.10d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.10e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.

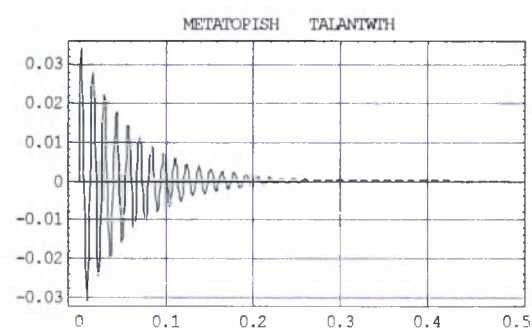


Διάγραμμα 6.10f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .

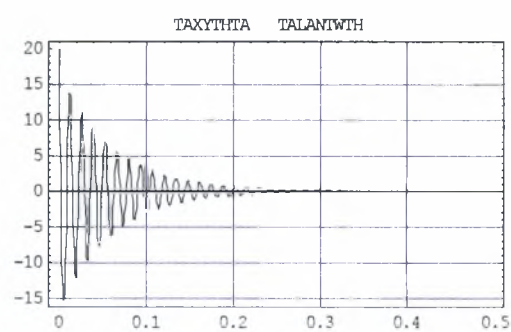


Διάγραμμα 6.10g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

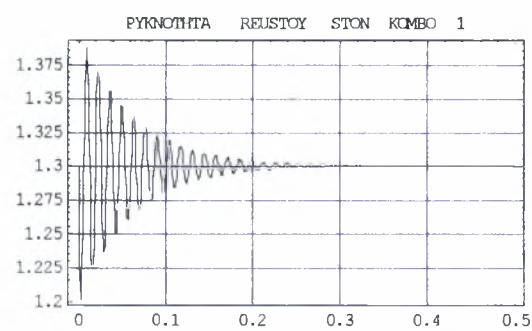
$CFL = 30$



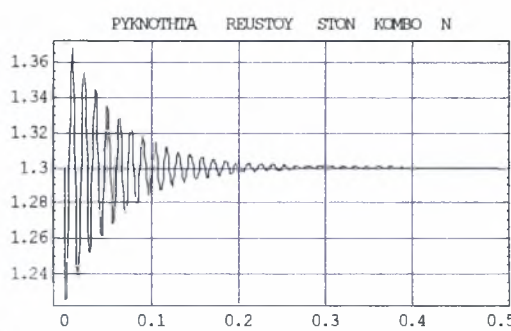
Διάγραμμα 6.11a: Μετατόπιση ταλαντωτή.



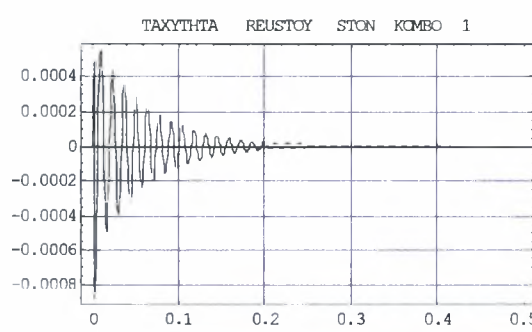
Διάγραμμα 6.11b: Ταχύτητα ταλαντωτή.



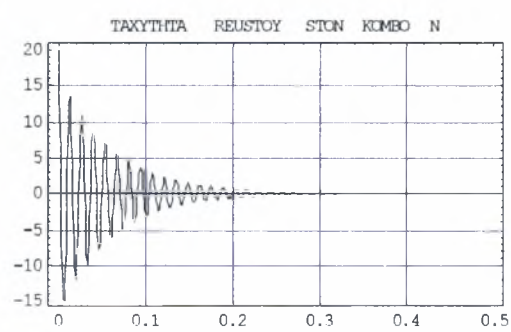
Διάγραμμα 6.11c: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



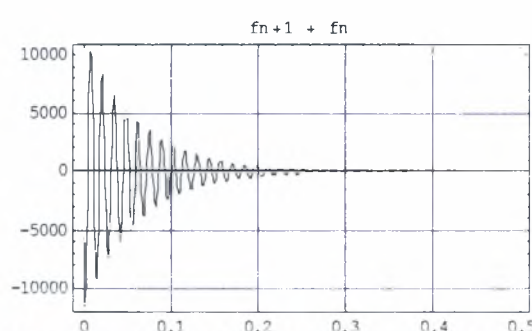
Διάγραμμα 6.11d: Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



Διάγραμμα 6.11e: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.



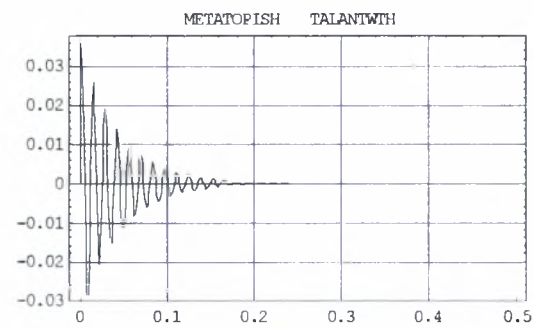
Διάγραμμα 6.11f: Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



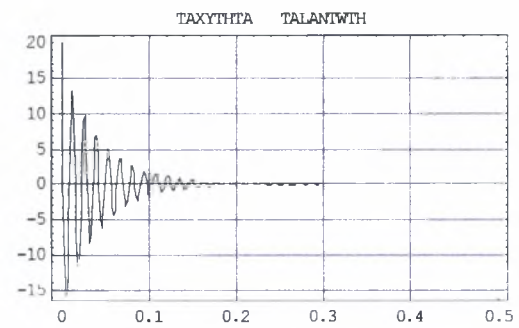
Διάγραμμα 6.11g: Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.



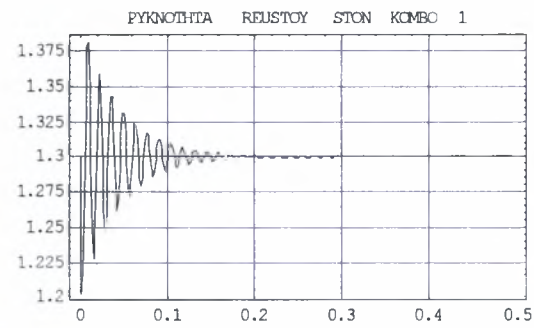
**CFL = 50**



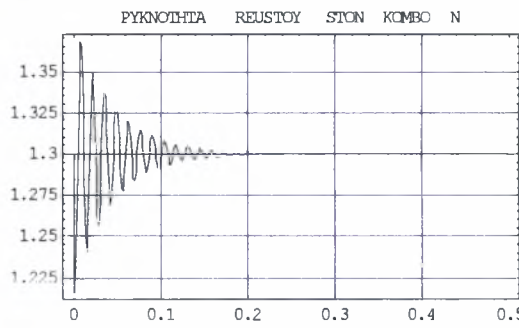
**Διάγραμμα 6.12a:** Μετατόπιση ταλαντωτή.



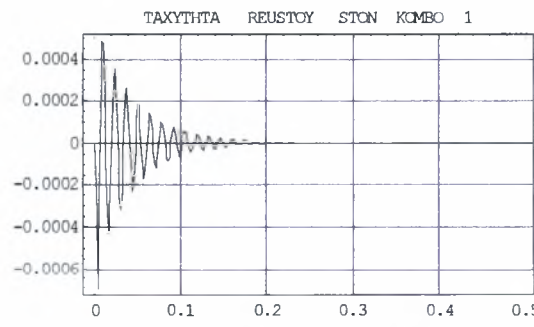
**Διάγραμμα 6.12b:** Ταχύτητα ταλαντωτή.



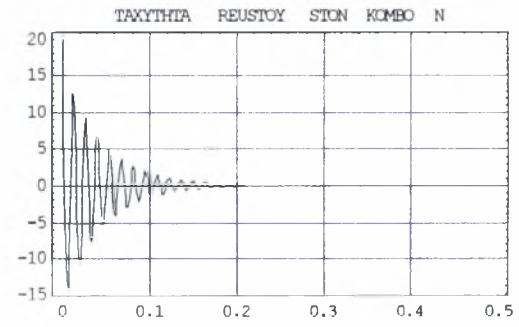
**Διάγραμμα 6.12c:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος 1.



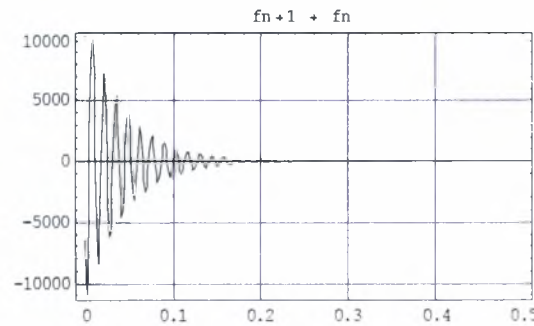
**Διάγραμμα 6.12d:** Πυκνότητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



**Διάγραμμα 6.12e:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος 1.



**Διάγραμμα 6.12f:** Ταχύτητα ρευστού, κόμβος  $N$ .



**Διάγραμμα 6.12g:** Εξωτερική διέγερση ταλαντωτή.

Είναι ξεκάθαρο πως τα αποτελέσματα των μεθόδων εξαρτώνται ισχυρά από τον αριθμό *CFL* . Το αριθμητικό σχήμα με διαφορά φάσης δεν είναι ευσταθές για την πρώτη πρόβλεψη, παρά μόνο για μικρά *CFL* και τα γραφήματα που προκύπτουν παρουσιάζουν μικρή απόσβεση που οφείλεται στην παραγωγή ενέργειας που εισάγει το αριθμητικό σχήμα επίλυσης του ρευστού, καθώς ο αλγόριθμος του ταλαντωτή είναι μηδενικού σφάλματος. Στο φυσικό πρόβλημα δεν παράγεται ενέργεια, ούτε καταναλώνεται, γι' αυτό και το πλάτος του ταλαντωτή στην αναλυτική λύση παραμένει σταθερό. Το ίδιο σχήμα με την δεύτερη πρόβλεψη παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη απόσβεση από την πρώτη πρόβλεψη. Η βελτίωση που γίνεται κάνει το μοντέλο περισσότερο ευσταθές και επεκτείνει την περιοχή αριθμών *CFL* στην οποία συγκλίνει. Το πλήρως μετατοπισμένο σχήμα παρουσιάζει μεγάλη απόσβεση, παρόμοια με το σχήμα με διαφορά φάσης και την δεύτερη πρόβλεψη και είναι ευσταθές για κάθε *CFL* . Και τα τρία σχήματα υπολογίζουν ίδιο αρχικό πλάτος, απόσβεση για ίδιους αριθμούς *CFL* .

Η συχνότητα του συζευγμένου συστήματος προκύπτει από τα διαγράμματα με την βοήθεια της σχέσης,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{6.28}$$

όπου *T* η περίοδος της κυμάτωσης στο γράφημα. Οι τιμές για το  $\omega$  που προκύπτουν και από τα τρία σχήματα φαίνονται στον πίνακα 6.1, για διάφορες τιμές του αριθμού *CFL* .

**Πίνακας 6.1:** Αποτελέσματα: Ιδιασυχνότητες.

<b>CFLΜέθοδος</b>	<b>Μετατοπισμένη, πρόβλεψη 1</b>	<b>Μετατοπισμένη, πρόβλεψη 2</b>	<b>Πλήρως πεπλεγμένη</b>
<b>CFL=1</b>	464.9	464.9	464.9
<b>CFL=10</b>	466.1	466.1	464.8
<b>CFL=30</b>	Δεν συγκλίνει	470.9	463.9
<b>CFL=50</b>	Δεν συγκλίνει	471.7	462.9

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά της ιδιοσυχνότητας ως προς την αναλυτική λύση. Το αριθμητικό σχήμα με διαφορά φάσης και πρόβλεψη 1, στην περιοχή που συγκλίνει, δίνει αποτελέσματα με μεγάλες διαφορές στην υπολογιζόμενη συχνότητα  $\omega$  . Το ίδιο συμβαίνει και για την δεύτερη πρόβλεψη, όπου ,όμως, η περιοχή που συγκλίνει και δίνει αποτελέσματα είναι μεγαλύτερη. Στο πλήρως πεπλεγμένο σχήμα η υπολογιζόμενη συχνότητα  $\omega$  είναι περίπου ίδια, ανεξάρτητα από τον αριθμό *CFL* . Η μέθοδος είναι μεγαλύτερης ακρίβειας από την ρητή. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το ότι το σχήμα συγκλίνει πάντα μας οδηγεί στην άποψη πως είναι το

προτιμώμενο για κάθε περίπτωση επίλυσης προβλημάτων αλληλοεπίδρασης ρευστού-κατασκευής. Είναι δυνατό να αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά που παρουσιάζουν τα αριθμητικά σχήματα στην επίλυση του προβλήματος στην μία διάσταση είναι παρόμοια σε ακρίβεια όταν εφαρμόζονται στο ίδιο πρόβλημα σε δύο ή τρεις διαστάσεις, ακόμα και με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας. Για τον λόγο αυτό και διότι προκύπτουν πολύ μεγάλα προβλήματα, σε υπολογιστικές απαιτήσεις και απαιτήσεις μνήμης, προτείνεται η πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος που επιτρέπει μεγάλα βήματα στον χρόνο.

## 6.5 Ευστάθεια

Η περίοδος  $\omega$  πρέπει να είναι ίδια με αυτή που προκύπτει από την αναλυτική λύση του προβλήματος και ίση με  $\omega = 341.17 \frac{rad}{sec}$ . Η εφαρμογή άλλων αριθμητικών σχημάτων είναι αναγκαία για να εκτιμηθεί η απόκλιση ανάμεσα σε αριθμητική και αναλυτική λύση.

Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή των τριών αλγορίθμων είναι δυνατό να μελετηθεί ως προς την ευστάθειά του. Αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας τις εξισώσεις του προβλήματος στην μορφή,

$$[A]\{\underline{X}^{n+1}\} = [B]\{\underline{X}^n\} + \{F\} \quad (6.29)$$

ή

$$\{\underline{X}^{n+1}\} = [A]^{-1}[B]\{\underline{X}^n\} + [A]^{-1}\{F\}, \quad (6.30)$$

όπου,

$$\{\underline{X}^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} \underline{X}_f^{n+1} \\ \underline{X}_s^{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \{\underline{X}^n\} = \begin{Bmatrix} \underline{X}_f^n \\ \underline{X}_s^n \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_f \\ \underline{F}_s \end{Bmatrix}. \quad (6.31)$$

Η ευστάθεια του σχήματος καθορίζεται από την φασματική ακτίνα του πίνακα  $[A]^{-1}[B]$  που εμπεριέχει το αριθμητικό σχήμα. Το μέτρο των ιδιοτιμών πρέπει να είναι μικρότερο από την μονάδα ώστε το σχήμα να είναι ευσταθές και να συγκλίνει.

Στους πίνακες 6.2, 6.3 και 6.4 φαίνονται τα μέτρα των ιδιοτιμών για τα τρία σχήματα και για  $N = 5$ ,  $N = 10$  και  $N = 20$ . Η ευστάθεια του μετατοπισμένου αριθμητικού σχήματος είναι υπό συνθήκες, δηλαδή για  $CFL \leq 14$  για την πρώτη πρόβλεψη και για  $CFL \leq 117$ , στην περίπτωση της δεύτερης πρόβλεψης. Το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα είναι πάντα ευσταθές. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευστάθειας φαίνονται στους

πίνακες 6.2 έως 6.4 για το μετατοπισμένο με την πρώτη πρόβλεψη, την δεύτερη και το πλήρως πεπλεγμένο, αντίστοιχα. Οι μιγαδικές ιδιοτιμές είναι συζυγής ανά δύο.

Όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες καθώς ο αριθμός των κόμβων πληθαίνει το μέτρο των ιδιοτιμών πλησιάζει στην μονάδα.

**Πίνακας 6.2a:** Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.

**Πρόβλεψη 1**

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1.00822	2.51819	27.3553	43.5847
2	1.00822	2.51819	1.08205	1.02817
3	1	1	1	1
4	0.555727	0.117655	0.041642	0.025166
5	0.555727	0.117655	0.041642	0.025166
6	0.354471	0.045969	0.015548	0.009352
7	0.354471	0.045969	0.015548	0.009352
8	0.27735	0.034483	0.011687	0.007036
9	0.27735	0.034483	0.011687	0.007036
10	0.231579	0.027909	0.009451	0.00569
11	0.231579	0.027909	0.009451	0.00569
12	0.218196	0.026096	0.008834	0.005318

**Πίνακας 6.2b:** Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.

**Πρόβλεψη 2**

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	9.15029	57.0301	88.4154
2	0.984704	1	1	1
3	0.984704	0.118677	0.04059	0.024195
4	0.517893	0.118677	0.04059	0.024195
5	0.517893	0.044895	0.015304	0.009189
6	0.346992	0.044895	0.015304	0.009189
7	0.346992	0.034483	0.011687	0.007036
8	0.27735	0.034483	0.011687	0.007036
9	0.27735	0.030042	0.009601	0.005787
10	0.233154	0.028486	0.009601	0.005787
11	0.233154	0.028486	0.009012	0.005433
12	0.220108	0.026771	0.004664	0.003058



**Πίνακας 6.2c: Σχήμα πλήρως πεπλεγμένο.**

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1	1	1
2	0.985583	0.983839	0.999401	0.999891
3	0.985583	0.983839	0.999401	0.999891
4	0.531043	0.112882	0.041149	0.024962
5	0.531043	0.112882	0.041149	0.024962
6	0.349742	0.045825	0.015538	0.009348
7	0.349742	0.045825	0.015538	0.009348
8	0.27735	0.034483	0.011687	0.007036
9	0.27735	0.034483	0.011687	0.007036
10	0.232498	0.027962	0.009455	0.005691
11	0.232498	0.027962	0.009455	0.005691

**Πίνακας 6.3a: Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.**

**Πρόβλεψη 1**

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1.00031	1.45815	6.89361	18.8722
2	1.00031	1.45815	1.54836	1.14009
3	1	1	1	1
4	0.778685	0.232306	0.091093	0.055939
5	0.778685	0.232306	0.091093	0.055939
6	0.534647	0.091171	0.03161	0.019066
7	0.534647	0.091171	0.03161	0.019066
8	0.412091	0.056541	0.019244	0.011586
9	0.412091	0.056541	0.019244	0.011586
10	0.34542	0.044269	0.015	0.009027
11	0.34542	0.044269	0.015	0.009027
12	0.297704	0.037399	0.012681	0.007634
13	0.297704	0.037399	0.012681	0.007634
14	0.260413	0.032121	0.010883	0.006551
15	0.260413	0.032121	0.010883	0.006551
16	0.235571	0.028738	0.009731	0.005858
17	0.235571	0.028738	0.009731	0.005858
18	0.220008	0.026659	0.009024	0.005432
19	0.220008	0.026659	0.009024	0.005432
20	0.211445	0.025528	0.00864	0.005201
21	0.211445	0.025528	0.00864	0.005201
22	0.20871	0.025168	0.008517	0.005127

**Πίνακας 6.3b: Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.**

## Πρόβλεψη 2

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1	18.1251	40.5233
2	0.995626	0.678957	1	1
3	0.995626	0.678957	0.092888	0.055614
4	0.768397	0.143767	0.092888	0.055614
5	0.768397	0.143767	0.031245	0.018855
6	0.524286	0.089181	0.031245	0.018855
7	0.524286	0.089181	0.019078	0.011501
8	0.404485	0.05558	0.019078	0.011501
9	0.404485	0.05558	0.014875	0.008964
10	0.3434	0.043587	0.014875	0.008964
11	0.3434	0.043587	0.01264	0.007613
12	0.297451	0.037203	0.01264	0.007613
13	0.297451	0.037203	0.01091	0.006566
14	0.260548	0.032245	0.01091	0.006566
15	0.260548	0.032245	0.009793	0.00589
16	0.235898	0.029004	0.009793	0.00589
17	0.235898	0.029004	0.009104	0.005474
18	0.220474	0.026996	0.009104	0.005474
19	0.220474	0.026996	0.008729	0.005248
20	0.211996	0.0259	0.008729	0.005248
21	0.211996	0.0259	0.00861	0.005176
22	0.209289	0.025551	0.00646	0.002905

Πίνακας 6.3c: Σχήμα πλήρως πεπλεγμένο.

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1	1	1
2	0.995678	0.940887	0.992987	0.998631
3	0.995678	0.940887	0.992987	0.998631
4	0.770934	0.208959	0.088375	0.054999
5	0.770934	0.208959	0.088375	0.054999
6	0.52812	0.089331	0.031489	0.01903
7	0.52812	0.089331	0.031489	0.01903
8	0.407165	0.056198	0.019224	0.01158
9	0.407165	0.056198	0.019224	0.01158
10	0.343981	0.044174	0.014996	0.009026
11	0.343981	0.044174	0.014996	0.009026
12	0.297499	0.037371	0.012679	0.007633
13	0.297499	0.037371	0.012679	0.007633
14	0.260512	0.032138	0.010884	0.006552
15	0.260512	0.032138	0.010884	0.006552
16	0.235782	0.028772	0.009733	0.005858
17	0.235782	0.028772	0.009733	0.005858
18	0.220286	0.026699	0.009026	0.005433
19	0.220286	0.026699	0.009026	0.005433
20	0.211762	0.02557	0.008642	0.005201
21	0.211762	0.02557	0.008642	0.005201
22	0.209039	0.025211	0.00852	0.005128

Πίνακας 6.4α: Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.

Πρόβλεψη 1

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1.08093	1.88161	2.77367
2	0.999945	1.08093	1.88161	2.77367
3	0.999945	1	1	1
4	0.930399	0.37245	0.177921	0.113795
5	0.930399	0.37245	0.177921	0.113795
6	0.784697	0.177713	0.06564	0.039917
7	0.784697	0.177713	0.06564	0.039917
8	0.64606	0.113729	0.039953	0.024137
9	0.64606	0.113729	0.039953	0.024137
10	0.538313	0.083363	0.02876	0.017341
11	0.538313	0.083363	0.02876	0.017341
12	0.45959	0.065846	0.022525	0.01357
13	0.45959	0.065846	0.022525	0.01357
14	0.406139	0.054564	0.018573	0.011184
15	0.406139	0.054564	0.018573	0.011184
16	0.369576	0.047609	0.016154	0.009723
17	0.369576	0.047609	0.016154	0.009723
18	0.339905	0.043347	0.014711	0.008856
19	0.339905	0.043347	0.014711	0.008856
20	0.311741	0.03927	0.013321	0.00802
21	0.311741	0.03927	0.013321	0.00802
22	0.287668	0.035901	0.012171	0.007327
23	0.287668	0.035901	0.012171	0.007327
24	0.26807	0.033219	0.011256	0.006776
25	0.26807	0.033219	0.011256	0.006776
26	0.25224	0.031085	0.010529	0.006338
27	0.25224	0.031085	0.010529	0.006338
28	0.239481	0.029383	0.00995	0.00599
29	0.239481	0.029383	0.00995	0.00599
30	0.229249	0.02803	0.00949	0.005713
31	0.229249	0.02803	0.00949	0.005713
32	0.221135	0.026965	0.009128	0.005494
33	0.221135	0.026965	0.009128	0.005494
34	0.214838	0.026142	0.008848	0.005326
35	0.214838	0.026142	0.008848	0.005326
36	0.21014	0.02553	0.00864	0.005201
37	0.21014	0.02553	0.00864	0.005201
38	0.206886	0.025108	0.008497	0.005115
39	0.206886	0.025108	0.008497	0.005115
40	0.204972	0.02486	0.008413	0.005064
41	0.204972	0.02486	0.008413	0.005064
42	0.204341	0.024778	0.008385	0.005047

Πίνακας 6.4b: Σχήμα σύζευξης με διαφορά φάσης.

**Πρόβλεψη 2**

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1	3.46774	12.0115
2	0.998874	0.94582	1	1
3	0.998874	0.94582	0.210291	0.119999
4	0.927728	0.271323	0.210291	0.119999
5	0.927728	0.271323	0.065999	0.039812
6	0.782258	0.142821	0.065999	0.039812
7	0.782258	0.142821	0.03963	0.023972
8	0.643893	0.096592	0.03963	0.023972
9	0.643893	0.096592	0.028479	0.017219
10	0.536179	0.07503	0.028479	0.017219
11	0.536179	0.07503	0.022328	0.013486
12	0.45692	0.063599	0.022328	0.013486
13	0.45692	0.063599	0.018454	0.011132
14	0.402995	0.053785	0.018454	0.011132
15	0.402995	0.053785	0.016067	0.009686
16	0.368248	0.04713	0.016067	0.009686
17	0.368248	0.04713	0.014625	0.008818
18	0.339556	0.042936	0.014625	0.008818
19	0.339556	0.042936	0.014373	0.008001
20	0.311682	0.039092	0.01328	0.008001
21	0.311682	0.039092	0.01328	0.007322
22	0.287656	0.035856	0.01216	0.007322
23	0.287656	0.035856	0.01216	0.006781
24	0.268083	0.033254	0.011265	0.006781
25	0.268083	0.033254	0.011265	0.006349
26	0.252279	0.031173	0.010553	0.006349
27	0.252279	0.031173	0.010553	0.006006
28	0.239547	0.02951	0.009984	0.006006
29	0.239547	0.02951	0.009984	0.005733
30	0.22934	0.028184	0.009531	0.005733
31	0.22934	0.028184	0.009531	0.005517
32	0.221248	0.027138	0.009175	0.005517
33	0.221248	0.027138	0.009175	0.005351
34	0.214969	0.02633	0.0089	0.005351
35	0.214969	0.02633	0.0089	0.005228
36	0.210286	0.025729	0.008695	0.005228
37	0.210286	0.025729	0.008695	0.005142
38	0.207042	0.025313	0.008554	0.005142
39	0.207042	0.025313	0.008554	0.005092
40	0.205135	0.02507	0.008471	0.005092
41	0.205135	0.02507	0.008471	0.005076
42	0.204506	0.024989	0.008443	0.00453

Πίνακας 6.3ε: Σχήμα πλήρως πεπλεγμένο.

Σημείο\CFL	CFL=1	CFL=10	CFL=30	CFL=50
1	1	1	1	1
2	0.998877	0.961306	0.960379	0.987406
3	0.998877	0.961306	0.960379	0.987406
4	0.927962	0.323239	0.165782	0.109372
5	0.927962	0.323239	0.165782	0.109372
6	0.782819	0.167794	0.064747	0.039677
7	0.782819	0.167794	0.064747	0.039677
8	0.644629	0.110672	0.039748	0.024085
9	0.644629	0.110672	0.039748	0.024085
10	0.53703	0.08215	0.028688	0.017323
11	0.53703	0.08215	0.028688	0.017323
12	0.457988	0.0653	0.022494	0.013562
13	0.457988	0.0653	0.022494	0.013562
14	0.404133	0.054312	0.018559	0.01118
15	0.404133	0.054312	0.018559	0.01118
16	0.368622	0.047497	0.016148	0.009722
17	0.368622	0.047497	0.016148	0.009722
18	0.339586	0.043263	0.014707	0.008855
19	0.339586	0.043263	0.014707	0.008855
20	0.311669	0.039231	0.013319	0.008019
21	0.311669	0.039231	0.013319	0.008019
22	0.287654	0.035891	0.012171	0.007327
23	0.287654	0.035891	0.012171	0.007327
24	0.268082	0.033226	0.011257	0.006776
25	0.268082	0.033226	0.011257	0.006776
26	0.25227	0.031102	0.01053	0.006339
27	0.25227	0.031102	0.01053	0.006339
28	0.239527	0.029407	0.009952	0.00599
29	0.239527	0.029407	0.009952	0.00599
30	0.229308	0.028057	0.009492	0.005713
31	0.229308	0.028057	0.009492	0.005713
32	0.221205	0.026994	0.009129	0.005495
33	0.221205	0.026994	0.009129	0.005495
34	0.214918	0.026172	0.00885	0.005326
35	0.214918	0.026172	0.00885	0.005326
36	0.210227	0.025562	0.008642	0.005201
37	0.210227	0.025562	0.008642	0.005201
38	0.206978	0.02514	0.008499	0.005115
39	0.206978	0.02514	0.008499	0.005115
40	0.205067	0.024892	0.008415	0.005064
41	0.205067	0.024892	0.008415	0.005064
42	0.204437	0.02481	0.008387	0.005048

## Κεφάλαιο 7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Το αντικείμενο μελέτης τούτης της εργασίας είναι η συμπεριφορά αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων αεροελαστικότητας. Εξετάστηκε το πρόβλημα εμβόλου στην μία διάσταση ώστε να επικεντρωθεί στην σύζευξη των δύο συστημάτων. Το ρευστό μοντελοποιείται από τις ακουστικές εξισώσεις και προσεγγίστηκε με πεπερασμένους όγκους στην διεύθυνση  $x$  και με κατάντη πεπερασμένες διαφορές στον χρόνο. Η κατασκευή μοντελοποιήθηκε από την ατριβή εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή και προσεγγίστηκε από την μέθοδο σταθερού συντελεστή επιτάχυνσης ή αλλιώς μέθοδο Newmark. Για να συζευχθούν τα δύο συζευγμένα συστήματα χρησιμοποιείται αρχικά η μετατοπισμένη στον χρόνο ή εναλλάξ μέθοδος η οποία χρησιμοποιεί δύο ανεξάρτητους αλγορίθμους επίλυσης, πεπλεγμένη για τον ταλαντωτή και ρητή για το ρευστό και η αλληλοεπίδραση λαμβάνει χώρα με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών. Η μέθοδος προκαλεί τεχνητή χρονική υστέρηση και εισάγει σφάλμα  $O(\Delta t)$  σε κάθε επανάληψη. Το σχήμα αυτό είναι με διαφορά φάσης και συγκλίνει για μικρά  $CFL$ . Έπειτα το πρόβλημα επιλύεται με την χρήση ενός πλήρως πεπλεγμένου αλγορίθμου ο οποίος επιλύει ταυτόχρονα και τα δύο συστήματα λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες. Το σχήμα είναι πάντα ευσταθές, για κάθε  $CFL$  και δίνει πολύ καλή εκτίμηση της ιδιοσυχνότητας του προβλήματος, που είναι και το σημαντικότερο αποτέλεσμα.

Οι υπολογισμοί δείχνουν πως τα αριθμητικά σχήματα τείνουν στην αναλυτική λύση καθώς το χρονικό βήμα μειώνεται. Τα διαφορετικά σχήματα δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα καθώς ο αριθμός  $CFL$  μεγαλώνει. Η ανάλυση ευστάθειας δείχνει πως το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα συγκλίνει χωρίς περιορισμούς σε αντίθεση με το μετατοπισμένο στον χρόνο. Το τελικό ζητούμενο είναι μία μέθοδος που θα επιτρέπει μεγάλα  $CFL$  και θα υπολογίζει την πραγματική ιδιοσυχνότητα για το συζευγμένο σύστημα. Θέτοντας τα παραπάνω σαν προϋποθέσεις επιλέγεται το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ως αποτελεσματικότερο, ακριβέστερο και ταχύτερο στην επίλυση.

Είναι ενδιαφέρον, για την συνέχεια, να μελετηθούν άλλα αριθμητικά σχήματα για την διακριτοποίηση του ρευστού, ώστε να εξεταστεί η επίδρασή τους στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Επίσης προτείνεται η επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων Euler του ρευστού.



## Βιβλιογραφία

- [1] Park, K.C. Fellipa, C.A., DeRuntz J.A., 1997, "Stabilisation of Staggered Solution Procedures for Fluid-Structure Interaction Analysis", Computational Methods for Fluid -Structure Interaction Problems, AMD Vol. 26.
- [2] Piperno P., 1995, "Simulation Numérique de Phénomènes d' Interaction Fluides-Structure", Ph.D. Thesis, Ecole National Des Ponts et Chaussées, France.
- [3] Farhat C., Maman N., Lesoinne M., 1994, "Mixed Implicit/Explicit Time Integration of Coupled Aeroelastic Problems: Three-Field Formulation, Geometric Conservation Law and Distributed Solution", CAS 94-17, University of Colorado.
- [4] Prananta B.B., Hounjet M.H.L., 1997, "Large Time Step Aero-Structural Coupling Procedures for Aeroelastic Simulation", Proceedings of 1997 International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Vol. II, pp. 63-70, AIDAA, Rome.
- [5] Giles M.B., 1995, "Stability and Accuracy of Numerical Boundary Conditions in Aeroelastic Analysis", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 24, pp. 739-757.
- [6] Bendiksen O.O., 1991, "A new Approach to Computational Aeroelasticity", AIAA Paper 91-0939-CP.
- [7] Blom F.J., Leyland P., 1997, "Analysis of Fluid- Structure Interaction by Means of Dynamic Unstructured Meshes", AD-Vol. 53-3, Fluid- Structure Interaction, Aeroelasticity, Flow-Induced Vibration and Noise, Volume I, ASME 1997.
- [8] Alonso J.J. Jameson A., 1994, "Fully-Implicit Time-Marching Aeroelastic Solutions", AIAA Paper 94-0056.
- [9] Melville R.B., Morton S.A., Rizzetta D.P., 1997, "Implementation of a Fully-Implicit Aeroelastic Navier-Stokes Solver", AIAA Paper 97-2039.
- [10] Scott A. Morton, Reid B. Melville, and Miguel R. Visbal, 1997, "Accuracy and Coupling Issues of Aeroelastic Navier-Stokes Solutions on Deforming Meshes", AIAA-97-1085. Wright Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- [11] Spalding B., "Fluid-Structure Interaction in the Presence of Heat Transfer and Chemical Reaction", PVP-Vol. 377-1, Computational Technologies for Fluid/ Thermal/ Structural/ Chemical Systems With Industrial Applications, Volume 1, ASME 1998.
- [12] Παπαϊωάννου Α, Μηχανική Των Ρευστών, Β' Έκδοση, 1993.
- [13] Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer". Hemisphere Publishing Corporation, ISBN 0-07-050328-1
- [14] Bathe K.J. "Finite element procedures in engineering analysis". Prentice Hall, Inc. ISBN 0-13-317305-4.

## Παράρτημα Α ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται οι πίνακες των τριών συστημάτων. Στα μετατοπισμένα στον χρόνο, πρώτο και δεύτερο, τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται ορίζονται ως,

$$a1 = c_s \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$a2 = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$a3 = 1 - 2c_s \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

και

$$a4 = c_s^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Στο πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ο συντελεστής  $a3$  ορίζεται ως,

$$a3 = 1 + 2c_s \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Τέλος ορίζεται το σύμβολο,

$$rbar = \bar{\rho}.$$

Οι πίνακες των συστημάτων που παρουσιάζονται είναι για δέκα  $\Delta x$ . Η διάστασή τους είναι  $12 \times 12$ , διότι περιλαμβάνουν και τις δύο εξισώσεις του ταλαντωτή. Αντίστοιχα προκύπτουν οι πίνακες για  $N \Delta x$ . Ο πίνακας 1 συνιστά το μετατοπισμένο σχήμα με πρόβλεψη 1, ο πίνακας 2 συνιστά το μετατοπισμένο σχήμα με πρόβλεψη 2 και ο πίνακας 3 συνιστά το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα.









## Παρόρτημα Β ΠΗΓΑΙΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ

```
(*Explicit Prediction 1 Algorithm*)
Clear[A1, Ar, f, fe, dx, dt,
      xmax, tmax, cs, l, rbar, m, k, g, u0, udot0,
      u2dot, pa, vstar, imax, jmax, xtsol, i, j, x, t, am,
      km, ii, p, pe, time, us, usn, r0sol, rsol, w0sol, wsol]
xmax = 1;
timemax = 1;
imax = 2 * 100;
cs = 328.17;
dx = xmax / (imax / 2);
dt = 1 * dx / cs;
tmax = timemax / dt;
rbar = 1.3;
m = 0.8;
k = 8080;
g = 1.4;
pa = 10^5;
u0 = 0;
udot0 = 20;
vstar = udot0;
a1 = cs * dt / dx;
a2 = dt / dx;
a3 = 1 + 2 * cs * dt / dx;
a4 = cs^2 * dt / dx;
timesteps = IntegerPart[tmax * 1];
time = IntegerPart[timesteps / 2];
p = Array[pe, {time, 2}];
(*Structure Initial Conditions*)
p[[1, 1]] = 0;
p[[1, 2]] = 20;
r0sol = Array[r0t, time];
r0sol[[1]] = rbar;
rsol = Array[rt, time];
rsol[[1]] = rbar;
w0sol = Array[w0t, time];
w0sol[[1]] = 0;
wsol = Array[wt, time];
wsol[[1]] = rbar * udot0;
```

```

A1 = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, a3,
    i + 1 == j && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + 1 && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
      i <= imax && j <= imax, a2,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
      i <= imax && j <= imax, -a2,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
      i <= imax && j <= imax, -a4,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
      i <= imax && j <= imax, a4,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
A1[[1, 1]] = 1;
A1[[1, 2]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2]]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2 + 2]]] = 2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax - 1]] = -2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], 1]] = 0;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 - 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2]]] = 1;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 + 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax + 2]] = a2 * rbar * 0;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 1]] = -2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 2]] = 2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2 + 2]]]
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], imax]] = 0;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 - 1]]] = -2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2]]] = 2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 + 1]]] = 0;
A1[[imax, imax - 1]] = 0;
A1[[imax, imax + 2]] = -a1 * rbar * 0;
A1[[imax + 1, IntegerPart[imax / 2]]] = -cs ^ 2 / g;
A1[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt ^ 2 + k;
A1[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
A1[[imax + 2, imax + 2]] = 1;

```

```

Ar = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, 1,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
Ar[[IntegerPart[imax/2], imax + 2]] = -a2 * rbar * 2;
Ar[[imax, imax + 2]] = a1 * rbar * 2;
Ar[[imax + 1, IntegerPart[imax/2]]] = cs^2 / g;
Ar[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt^2 - k;
Ar[[imax + 1, imax + 2]] = 4 * m / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 2]] = -1;
xtsol = Array[xt, {2, imax + 2}];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++,
  Which[i <= IntegerPart[imax/2], xt[1, i] = 1.3,
    IntegerPart[imax/2] < i < imax, xt[1, i] = 0,
    i == imax, xt[1, i] = rbar * vstar,
    i == imax + 1, xt[1, imax + 1] = u0,
    i == imax + 2, xt[1, imax + 2] = udot0
  ]
Do[xt[2, i] = 0, {i, 1, imax + 2}]
f = Array[fe, imax + 2];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++, fe[i] = 0]
fe[imax + 1] = -2 * pa;
(*First Monolithical Solution,
j-->Space,i-->Time*)
xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f];
(*EDW KSEKINAI TO LOOP*)
For[ii = 2, ii <= time, ii++,
  {
    Do[xtsol[[1, i]] = 0, {i, 1, imax + 2}],
    Do[xtsol[[1, i]] = xtsol[[2, i]], {i, 1, imax + 2}],
    Do[xtsol[[2, i]] = 0, {i, 1, imax + 2}],
    xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f],
    p[[ii, 1]] = xtsol[[2, imax + 1]],
    p[[ii, 2]] = xtsol[[2, imax + 2]],
    r0sol[[ii]] = xtsol[[2, 1]],
    rsol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax/2]]],
    w0sol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax/2 + 1]]],
    wsol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax]]]
  }
]

```

```

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, p[[v, 1]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "METATOPISH TALANTWTH" ]

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, p[[v, 2]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  GridLines → Automatic, Frame → True, PlotRange → All,
  PlotLabel → "TAXYTHTA TALANTWTH" ]

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, r0sol[[v]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO 1" ]

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, w0sol[[v]] / rbar}, {v, 1, t
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO 1" ]

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, rsol[[v]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO N" ]

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, wsol[[v]] / rbar}, {v, 1, ti
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO N" ]

ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps,
  (rsol[[v]] + rsol[[v + 1]]) * cs^2 / g - 2 * pa},
  {v, 1, time - 1}], PlotJoined → True,
  AxesOrigin → {0, 0}, Frame → True, PlotRange → All,
  GridLines → Automatic, PlotLabel → "fn+1 + fn" ]

```

```

(*Explicit Prediction 2 Algorithm*)
Clear[Al, Ar, f, fe, dx, dt, xmax, tmax, cs, l, rbar,
  m, k, g, u0, udot0, u2dot, pa, vstar, imax, jmax, xtso
  i, j, x, t, am, km, ii, p,
  pe, time, us, usn, r0sol, rsol, w0sol, wsol];
xmax = 1;
timemax = 1;
imax = 2 * 100;
cs = 328.17;
dx = xmax / (imax / 2);
dt = 1 * dx / cs;
tmax = timemax / dt;
rbar = 1.3;
m = 0.8;
k = 8000;
g = 1.4;
pa = 10^5;
u0 = 0;
udot0 = 20;
vstar = udot0;
a1 = cs * dt / dx;
a2 = dt / dx;
a3 = 1 + 2 * cs * dt / dx;
a4 = cs^2 * dt / dx;
timesteps = IntegerPart[tmax * 1];
time = IntegerPart[timesteps / 2];
p = Array[pe, {time, 2}];
(*Structure Initial Conditions*)
p[[1, 1]] = 0;
p[[1, 2]] = 20;
r0sol = Array[r0t, time];
r0sol[[1]] = rbar;
rsol = Array[rt, time];
rsol[[1]] = rbar;
w0sol = Array[w0t, time];
w0sol[[1]] = 0;
wsol = Array[wt, time];
wsol[[1]] = rbar * udot0;

```



```

A1 = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, a3,
    i + 1 == j && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + 1 && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
    i <= imax && j <= imax, a2,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
    i <= imax && j <= imax, -a2,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
    i <= imax && j <= imax, -a4,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
    i <= imax && j <= imax, a4,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
A1[[1, 1]] = 1;
A1[[1, 2]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2]]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2 + 2]]] = 2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax - 1]] = -2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], 1]] = 0;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 - 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2]]] = 1;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 + 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax + 2]] = a2 * rbar * 0;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 1]] = -2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 2]] = 2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2 + 2]]]
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], imax]] = 0;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 - 1]]] = -2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2]]] = 2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 + 1]]] = 0;
A1[[imax, imax - 1]] = 0;
A1[[imax, imax + 2]] = -a1 * rbar * 0;
A1[[imax + 1, IntegerPart[imax / 2]]] = -cs ^ 2 / g;
A1[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt ^ 2 + k;
A1[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
A1[[imax + 2, imax + 2]] = 1;

```

```

Ar = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, 1,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
Ar[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2]] =
  1 - a2 * (cs ^ 2) * dt * rbar / (g * m);
Ar[[IntegerPart[imax / 2], imax + 1]] = a2 * dt * k * rbar /
Ar[[IntegerPart[imax / 2], imax + 2]] = -2 * a2 * rbar;
Ar[[imax, IntegerPart[imax / 2]]] =
  a1 * dt * (cs ^ 2) * rbar / (g * m);
Ar[[imax, imax + 1]] = -a1 * dt * k * rbar / m;
Ar[[imax, imax + 2]] = 2 * a1 * rbar;
Ar[[imax + 1, IntegerPart[imax / 2]]] = cs ^ 2 / g;
Ar[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt ^ 2 - k;
Ar[[imax + 1, imax + 2]] = 4 * m / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 2]] = -1;
xtsol = Array[xt, {2, imax + 2}];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++,
  Which[i <= IntegerPart[imax / 2], xt[1, i] = 1.3,
    IntegerPart[imax / 2] < i < imax, xt[1, i] = 0,
    i == imax, xt[1, i] = rbar * vstar,
    i == imax + 1, xt[1, imax + 1] = u0,
    i == imax + 2, xt[1, imax + 2] = udot0]
]
Do[xt[2, i] = 0, {i, 1, imax + 2}]
f = Array[fe, imax + 2];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++, fe[i] = 0]
f[[IntegerPart[imax / 2]]] = a2 * dt * pa * rbar / m;
f[[imax]] = -a1 * dt * pa * rbar / m;
f[[imax + 1]] = -2 * pa;
(*First Monolithical Solution,
j-->Space,i-->Time*)
xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f];
"EDW KSEKINAI TO LOOP";

```

```

For[ii = 2, ii <= time, ii++,
{
  Do[xtsol[[1, i]] = 0, {i, 1, imax + 2}],
  Do[xtsol[[1, i]] = xtsol[[2, i]], {i, 1, imax + 2}],
  Do[xtsol[[2, i]] = 0, {i, 1, imax + 2}],
  xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f],
  p[[ii, 1]] = xtsol[[2, imax + 1]],
  p[[ii, 2]] = xtsol[[2, imax + 2]],
  r0sol[[ii]] = xtsol[[2, 1]],
  rsol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax / 2]]],
  w0sol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax / 2 + 1]]],
  wsol[[ii]] = xtsol[[2, IntegerPart[imax]]]
}
]
ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, p[[v, 1]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "METATOPISH TALANTWTH"]
ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, p[[v, 2]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, GridLines → Automatic,
  AxesOrigin → {0, 0}, Frame → True, PlotRange → All,
  PlotLabel → "TAXYTHTA TALANTWTH"]
ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, r0sol[[v]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO 1"]
ListPlot[Table[
  {(v - 1) / timesteps, w0sol[[v]] / rbar}, {v, 1, time}]
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO 1"]
ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, rsol[[v]]}, {v, 1, time}],
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO N"]

```

```

ListPlot[
  Table[{(v - 1) / timesteps, wsol[[v]] / rbar}, {v, 1, ti},
  PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
  Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic,
  PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO N"]
ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps,
  (rsol[[v]] + rsol[[v + 1]]) * cs^2 / g - 2 * pa},
  {v, 1, time - 1}], PlotJoined → True,
  AxesOrigin → {0, 0}, Frame → True, PlotRange → All,
  GridLines → Automatic, PlotLabel → "fn+1 + fn"]

```

```

(*Monolithical Algorithm*)
Clear[A1, Ar, f, fe, dx, dt, xmax, tmax, cs, l, rbar,
      m, k, g, u0, udot0, u2dot, pa, vstar, imax, jmax, xtso
      i, j, x, t, am, bm, ii, p,
      pe, time, us, usn, r0sol, rsol, w0sol, wsol];
xmax = 1;
timemax = 1;
imax = 2 * 100;
dx = xmax / (imax / 2);
cs = 328.17;
dt = 1 * dx / cs;
tmax = timemax / dt;
rbar = 1.3;
m = 0.8;
k = 8000;
g = 1.4;
pa = 10^5;
u0 = 0;
udot0 = 20;
vstar = udot0;
a1 = cs * dt / dx;
a2 = dt / dx;
a3 = 1 + 2 * cs * dt / dx;
a4 = cs^2 * dt / dx;
timesteps = IntegerPart[tmax * 1];
time = IntegerPart[timesteps / 2];
p = Array[pe, {time, 2}];
(*Structure Initial Conditions*)
p[[1]] = {{0}, {20}};
r0sol = Array[r0t, time];
r0t[1] = rbar;
rsol = Array[rt, time];
rt[1] = rbar;
w0sol = Array[w0t, time];
w0t[1] = 0;
wsol = Array[wt, time];
wt[1] = rbar * udot0;

```

```

A1 = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, a3,
    i + 1 == j && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + 1 && i <= imax && j <= imax, -a1,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
    i <= imax && j <= imax, a2,
    i == j + IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
    i <= imax && j <= imax, -a2,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 + 1] &&
    i <= imax && j <= imax, -a4,
    i == j - IntegerPart[imax / 2 - 1] &&
    i <= imax && j <= imax, a4,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
A1[[1, 1]] = 1;
A1[[1, 2]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2]]] = 0;
A1[[1, IntegerPart[imax / 2 + 2]]] = 2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax - 1]] = -2 * a2;
A1[[IntegerPart[imax / 2], 1]] = 0;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 - 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2]]] = 1;
A1[[IntegerPart[imax / 2], IntegerPart[imax / 2 + 1]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2], imax + 2]] = a2 * rbar;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 1]] = -2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], 2]] = 2 * a4;
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], IntegerPart[imax / 2 + 2]]] =
A1[[IntegerPart[imax / 2 + 1], imax]] = 0;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 - 1]]] = -2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2]]] = 2 * a4;
A1[[imax, IntegerPart[imax / 2 + 1]]] = 0;
A1[[imax, imax - 1]] = 0;
A1[[imax, imax + 2]] = -a1 * rbar;
A1[[imax + 1, IntegerPart[imax / 2]]] = -cs ^ 2 / g;
A1[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt ^ 2 + k;
A1[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
A1[[imax + 2, imax + 2]] = 1;

```

```

Ar = Table[
  Which[i == j && i <= imax && j <= imax, 1,
    True, 0
  ], {j, 1, imax + 2}, {i, 1, imax + 2}
];
Ar[[IntegerPart[imax/2], imax + 2]] = -a2 * rbar;
Ar[[imax, imax + 2]] = a1 * rbar;
Ar[[imax + 1, IntegerPart[imax/2]]] = cs^2 / g;
Ar[[imax + 1, imax + 1]] = 4 * m / dt^2 - k;
Ar[[imax + 1, imax + 2]] = 4 * m / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 1]] = -2 / dt;
Ar[[imax + 2, imax + 2]] = -1;
xtsol = Array[xt, {2, imax + 2}];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++,
  Which[i <= IntegerPart[imax/2], xt[1, i] = 1.3,
    IntegerPart[imax/2] < i < imax, xt[1, i] = 0,
    i == imax, xt[1, i] = rbar * vstar,
    i == imax + 1, xt[1, imax + 1] = u0,
    i == imax + 2, xt[1, imax + 2] = udot0
  ]
Do[xt[2, i] = 0, {i, 1, imax + 2}]
f = Array[fe, imax + 2];
For[i = 1, i <= imax + 2, i++, fe[i] = 0]
fe[imax + 1] = -2 * pa;
(*First Monolithical Solution,
j-->Space,i-->Time*)
xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f];
(*EDW KSEKINAI TO LOOP*)
For[ii = 2, ii <= time, ii++,
  {
    Do[xtsol[[1, i]] = 0, {i, 1, imax + 2}],
    Do[xtsol[[1, i]] = xtsol[[2, i]], {i, 1, imax + 2}],
    xtsol[[2]] = LinearSolve[A1, Ar . xtsol[[1]] + f],
    p[[ii]] = {{xtsol[[2, imax + 1]]}, {xtsol[[2, imax + 2]
    r0t[ii] = xtsol[[2, 1]],
    rt[ii] = xtsol[[2, IntegerPart[imax/2]]],
    w0t[ii] = xtsol[[2, IntegerPart[imax/2 + 1]]],
    wt[ii] = xtsol[[2, IntegerPart[imax]]]
  }
]

```



```

ListPlot[Table[
  {(v - 1) / timesteps, First[p[[v, 1]]]}, {v, 1, time}]
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic
PlotLabel → "METATOPISH TALANTWTH" ]
ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps, Last[p[[v, 2]]]},
  {v, 1, time}], PlotJoined → True,
AxesOrigin → {0, 0}, Frame → True, GridLines → Automa
PlotRange → All, PlotLabel → "TAXYTHTA TALANTWTH" ]
ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps, rot[v]}, {v, 1, tir
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic.
PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO 1" ]
ListPlot[
Table[{(v - 1) / timesteps, w0t[v] / rbar}, {v, 1, time}
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic.
PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO 1" ]
ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps, rt[v]}, {v, 1, time
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic.
PlotLabel → "PYKNOTHTA REUSTOY STON KOMBO N" ]
ListPlot[
Table[{(v - 1) / timesteps, wt[v] / rbar}, {v, 1, time}]
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic.
PlotLabel → "TAXYTHTA REUSTOY STON KOMBO N" ]
ListPlot[Table[{(v - 1) / timesteps,
  (rt[v] + rt[v + 1]) * cs^2 / g - 2 * pa}, {v, 1, time - 1}
PlotJoined → True, AxesOrigin → {0, 0},
Frame → True, PlotRange → All, GridLines → Automatic.
PlotLabel → "fn+1 + fn" ]

```



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 748/1  
Ημερ. Εισ.:  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2000  
ΚΑΡ